SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ

MATEMATIČKO FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

1

GODINA VIII.
ZAGREB
1957 — 58

IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NRH

»MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST za učenike srednjih škola« izlazi u 4 broja po 40 stranica. Za vrijeme ferija list ne izlazi.
Pretplata za 4 broja iznosi Din 200. — Pojedini se broj prodaje po Din 60.— Pretplatu i narudžbe slati na adresu: »MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165 ili na čekovni račun broj 40-KB-6-Ž-1884 — Pretplata se može slati i poštanskom uplatnicom.

SADRŽAJ

Strana

Dr. Mladen Paić, Porast nivoa radioaktivnosti uzrokovan nuklearnim eksplozijama 1
Бегазимовић Божидар, Један задатак о троуглу 3
Dr. Gaja Alaga, Modeli atomske jezgre 7
Škarica Stjepan, O aritmetičkim nizovima *n*-toga reda 9
Станојевић Б., О једнако састављеним полигонима 12
Bonifačić Ante, Zanimljive optičke pojave na Jadranu 15
Ušan Janez, Še nekaj o konstrukciji kvadratnega korena kompleksnega števila 17

Zanimljivosti i razno: Takmičenje učenika srednjih škola NR Makedonije — Supernove i radioaktivnost — Poluvodiči kao termoelektrični generatori — Katalitička nuklearna reakcija — Kako bismo odredili brojeve, kojih se kvadrati svršavaju istim tim brojevima — Naučnici se zabavljaju — S tri dvojke 18

Nove knjige: *Smolec* I. Matematika i stvarnost — *Paić M.* Fizička mjerenja 25

Zadaci i rješenja: A. Zadaci iz matematike — B. Zadaci iz fizike — C. Rješenja iz matematike — D. Rješenja iz fizike . . . 26

Vježbe iz matematike za učenike viših razreda gimnazije 35
Vježbe za prijemni ispit iz matematike 38
Možda ste zaboravili 40
Matematička križaljka . . . . . 3. str. omota

Uređivački odbor:

AHLIN FRANC, profesor VPŠ, Ljubljana
BANDIĆ IVAN, profesor VPŠ, Beograd
HRABAK FRANJO, dir. II. gimn., Zagreb
KOSMAJAC MOMČILO, prof. g., Cetinje
KRAJNOVIĆ MILAN, profesor, Zagreb
LAZIĆ MARKO, direktor VPŠ, Mostar
NIKOLOVSKI TOME, profesor, Skopje
ŠINDLER GUSTAV, profesor, Zagreb
VERNIĆ ELZA, profesor, Zagreb

Glavni urednici:

MARKOVIĆ dr. BRANIMIR, docent Prirodoslovno-matematičkog fakulteta Zagreb
ŠKREBLIN STJEPAN, h. prof. VPŠ, Zagreb

VLASNIK SAVEZ DRUŠTAVA MATEMATIČARA I FIZIČARA FNRJ
IZDAJE DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NAR. REPUBLIKE HRVATSKE

Tisak Grafičkog zavoda Hrvatske

MATEMATIČKO-FIZIČKI LIST

ZA UČENIKE SREDNJIH ŠKOLA

GODINA VIII. BROJ 1 | ZAGREB | ŠKOL. GOD. 1957. — 1958.

Porast nivoa radioaktivnosti uzrokovan nuklearnim eksplozijama

PROF. DR. MLADEN PAIĆ, Zagreb

Prva atomska bomba, koja je razorila Hirošimu, prvih dana mjeseca kolovoza 1945., poharala je područje od 18 kvadratnih kilometara. U usporedbi s »klasičnim« eksplozivima, ovo, danas već primitivno oružje, značilo je veliku revoluciju u ratnom naoružanju. No doskora se Svijet našao pred drugom, ne manje značajnom revolucijom: 1. studenog 1952., eksplodirala je prva termonuklearna bomba, s mnogo većim razornim djelovanjem. Ono je zahvatilo prostranstvo od 800 kvadratnih kilometara. Nije trebalo čekati dugo i na treću revoluciju: 1. ožujka 1954., eksplozija super-bombe popraćena je smrtonosnim radioaktivnim padavinama, na području od desetak tisuća kvadratnih kilometara. Tom prilikom obasuti su radioaktivnom prašinom ribari japanskog broda »Sretni zmaj«, a čovječanstvo se upoznalo s tom novom i teškom opasnošću nuklearnih eksplozija. Japanska javnost se, iz razumljivih razloga, prva uzbudila: eksplozija se zbila relativno blizu Japana, nastradali su japanski građani, tunina dopremljena na japansko tržište bila je djelomično zaražena radioaktivnošću, a konačno, Japanci su već iskusili strahote atomskog rata. No i svjetska javnost se uznemirila, kad je postalo očigledno da opasnost od radioaktivnih padavina nije samo skučena na neko ograničeno, ma da i veliko područje, već da ona prijeti čitavom čovječanstvu, ukoliko se nastavi s pokusnim nuklearnim eksplozijama.

Htio bih u nekoliko riječi kazati u čemu je bit triju kategorija bombi, koje sam spomenuo, kako nastaju smrtonosne, lokalne, radioaktivne padavine u području eksplozije superbombi i, konačno, kako dolazi do radioaktivnih padavina rasprostranjenih po čitavoj kugli zemaljskoj.

Uranova bomba, kakova je bila spuštena na Hirošimu, dobiva svoju razornu moć isključivo od energije, koja se oslobađa cijepanjem jezgri urana-235 ili plutonija-241. Time nastaje oko stotinu različnih vrsti radioaktivnih jezgri. Kod eksplozija malih bombi, kakove su pale na Hirošimu i Nagasaki, opasnost od krhotina uranovih ili plutonijevih jezgri nije u svjetskim razmjerima značajna, jer je količina nuklearnog eksploziva mala. Ipak i takove eksplozije mogu, ako su se zbile dovoljno blizu tla, zagaditi radioaktivnošću teren, koji je bio zahvaćen plamenom kuglom eksplozije i učiniti ga opasnim kroz nekoliko dana.

Druga kategorija bombi, ne dobiva svoju energiju samo od cijepanja jezgri, već i od spajanja dviju jezgri deuterija u helij-3 i neutron znatne energije, odnosno spajanjem deuterija i tritija u helij-4 uz oslobađanje neutrona još veće energije. Prvobitna, uranova ili plutonijeva bomba još uvijek čini bitni sastavni dio termonuklearne bombe, no ona više nije jedini izvor energije; njena uloga je prven-

stveno da ugrije, na više milijuna stupnjeva, okolni plašt sastavljen od lakih jezgri, da bi se termonuklearna ekspozija mogla odvijati: ona je divovska iskra, koja dovodi do termonuklearnog požara. Reakcija spajanja ne prouzrokuje sama po sebi stvaranje radioaktivnih elemenata, oni opet dolaze od cijepanja urana ili plutonija. No, kad je eksplozija izvršena blizu tla ili blizu morske površine, opet može, zbog prisutnosti neutrona, doći do inducirane radioktivnosti. Glavni izvor radioaktivnosti ostaju međutim krhotine teških jezgri.

Treća kategorija je super-bomba, kojoj je eksplozija popraćena velikom količinom radioaktivnih elemenata. Naravno da nije poznata detaljna konstrukcija te super-bombe, no iz poznatih nuklearnih reakcija i analize radioaktivnih padavina, koje su učinili japanski naučenjaci, može se s mnogo vjerojatnosti zaključiti, da se radi o termonuklearnoj bombi, o kojoj sam upravo govorio, kojoj je dodan oklop iz jeftinog urana-238, kojeg u prirodi ima 140 puta više od dragocjenog urana-235.

Brzi neutroni, nastali naročito termonuklearnim reakcijama, prouzrokuju cijepanje urana-238, iz oklopa. Time se postizava još znatnije oslobođanje nuklearne energije, dakle i povećanje razornog djelovanja u području eksplozije, a ujedno se, u mnogo većoj količini negoli kod jednostavne termonuklearne bombe, stvaraju, na ogromnim prostranstvima, radioaktivne padavine. Upravo ove radioaktivne padavine čine pokusne eksplozije ovakove vrste oružja svjetskim pitanjem.

Kad super-bomba eksplodira, a njena plamena kugla zahvati tlo, ogromne mase tla, milijuni tona, usisane su u plamenu kuglu, koja se diže više desetaka kilometara u vis i prelazi iz troposfere u stratosferu. Čestice usisane prašine pokrivene su radioaktivnim krhotinama razbijenih jezgri urana, a donekle i same postaju radioaktivne zbog mnoštva neutrona, koji se nalaze u unutrašnjosti plamene gljive, Ova radioaktivna prašina postaje igra brzih vjetrova troposfere i stratosfere, koji je raznose u smjeru svojeg kretanja. Zbog razmjerno velike težine čestica prašine, ona pada na tlo, gdje stvara radioaktivni pokrov. Veliki dio te prašine staloži se, u kratko vrijeme od jednog dana, no na područjima, koja se prostiru na udaljenostima od više stotina kilometara od mjesta eksplozije. To su takozvane lokalne padavine. Japanski ribari bili su zahvaćeni tim padavinama, i teško su nastradali. Po mišljenju američkih vojnih stručnjaka ove lokalne padavine mogu biti pojave od strašnih razmjera.

No eksplozija super-bombe ne mora prouzrokovati lokalne padavine, a niti se lokalnim padavinama, kad one postoje, atmosfera očisti od radioaktivnih elemenata. Visoko u stratosferu doprli radioaktivni elementi vraćaju se na tlo polagano, kroz desetak godina, u kiši i snijegu. Za to vrijeme velika većina radioaktivnih elemenata se već raspala i pretvorila u neopasne, stabilne atome.

Međutim, između mnogobrojnih ostalih radioaktivnih elemenata, eksplozijom urana nastaje, u znatnom iznosu, radioaktivni izotop plemenitog plina kriptona, takozvani kripton-90. On se ne spaja s prašinom istrgnutom iz tla, niti ostaje dugo unutar plamene gljive nastale eksplozijom, već naglo iz nje izlazi i dopire u stratosferu. Kripton-90 je radioaktivni djed elementa stroncija-90, koji ima dva, za čovjeka vrlo nezgodna, svojstva:

Prvo, njegov polu-period iznosi 28 godina, pa nije kratak prema vremenu ispadanja iz stratosfere, a ni prema životu čovjeka. To znači da se količina stroncija-90 sama od sebe smanji na polovicu tek nakon 28 godina.

Drugo, po svojim kemijskim svojstvima vrlo je sličan kalciju, pa u ljudskom organizmu slijedi put kalcija, koji se taloži u kostima.

U ljudskom organizmu prije termonuklearnih eksplozija nije bilo radioaktivnog stroncija-90. No od 1954. g. ovamo iz stratosfere se taloži stroncij-90 na povr-

šinu zemlje. Radioaktivnost te površine iznosi danas oko 5 milicuriea* po kvadratnom kilometru, a dolazi pretežno od stroncija-90 U ljudski organizam stroncij-90 dolazi posredstvom mlijeka i mliječnih proizvoda. Stoka, koja daje mlijeko, pase naime travu onečišćenu nevidljivim radioaktivnim pokrovom. Stroncij-90 prelazi u mlijeko, a odavde u ljudski organizam.

Analiza kostiju od pet stotina ljudskih leševa iz svih krajeva Svijeta, izvršena u Columbia Univerzitetu. S. A. D., pokazala je da one u prosjeku sadrže 12 stotnina mikro-mikrocuriea stroncija-90 po gramu kalcija, što je deset tisuća puta manja aktivnost negoli se dopušta za osobe, koju su u svome poslu izložene radioaktivnosti, a sto puta manja aktivnost od one, koju Britanski liječnički savjet smatra značajnom za osobe, koje po svome zanimanju nisu izložene radioaktivnoj zarazi. No ovdje treba istaknuti da je navedena aktivnost prosjek, a da mala djeca imaju tri do četiri puta veće koncentracije stroncija u svojim kostima negoli odrasli. Osim toga lokalni uvjeti mogu znatno utjecati na zadržavanje stroncija-90 u organizmu: u krajevima gdje su tlo ili voda vrlo siromašni na kalciju, organizam može zadržati i pedeset puta veće količine stroncija-90 od svjetskog prosjeka.

Ukoliko pokusne eksplozije sa super-bombama budu i dalje nastavljene istom učestalošću, može se očekivati, da će 1970. godine prosjek aktivnosti stroncija-90 u ljudskim kostima narasti na 4 do 8 mikro-mikrocuriea po gramu kalcija, a to znači da će se aktivnost stroncija-90 u kostima opasno približiti granici, koju Britanski liječnički savjet smatra dopustivom.

Nažalost ni navedene dopustive aktivnosti nisu neke granice, za koje se sa sigurnošću zna da ispod njih nema opasnosti, a da tek iznad njih ona počinje. Poznato je, na primjer, da su mladi organizmi u rastu mnogo puta osjetljiviji na djelovanje zračenja nego li odrasli, a da su se granice dopustivih doza zračenja od 1925. g. pa ovamo internacionalnim dogovorom uvijek smanjivale, dakle da su dosad bile suviše optimistički postavljene.

U kostima svakog čovjeka na Svijetu nastavlja se raspad atomskih jezgri, koji je počeo nuklearnom eksplozijom 1954. godine na Pacifiku i nastavit će se tako do njegove smrti. U kostima svakog novorođenog djeteta već ima stroncija-90, a njegova količina će se i dalje povećavati. Nitko ne može izbjeći ovoj opasnosti, bez obzira na dob ili na mjesto gdje živi. Jedina mogućnost da se napredovanje tog zla spriječi jest da se prestane s pokusnim nuklearnim eksplozijama. Svatko ima pravo da to traži.

Један задатак о троуглу

БОЖИДАР ЂЕРАСИМОВИЋ, Београд

1. Математички задаци у којима је дато мање података него што је потребно називају се неодређени задаци. Могу се разликовати две врсте таквих задатака: потпуно неодређени и непотпуно одређени задаци[1]. Ако је, например дата једна страна правоугаоника онда се о другој страни ништа незна. То је потпуно неодређен задатак. Али ако је дата дијагонала правоугаоника, а траже се стране, онда

* 1 curie je ona količina radioaktivne tvari, koja proizvodi $3{,}70 \cdot 10^{10}$ raspada u 1 sekundi; to je broj raspada 1 grama radija.

[1]) Видети чланак: Михаило Петровић: »О зависности међу величинама у задацима«. (М. Петровић: Чланци, Научна књига, Београд, 1949, стр. 1—9) као и књигу: Михаило Петровић: »Бројни размаци«, Београд, 1931 год.

се ипак нешто зна. Стране правоугаоника су краће од дијагонале, па ако је d дата дијагонала, онда стране a и b леже у размацима:

$$0 < a < d, \qquad 0 < b < d.$$

Зато је овај задатак непотпуно одређен.

Уопште у непотпуно одређеним задацима може се за сваку тражену величину одредити по један размак у коме се она налази. Ако су, например, дате две стране троугла $a = 9$, $b = 5$, трећа страна није одређена, али се ипак зна да се она налази у размаку: $4 < c < 14$.

У решавању непотпуно одређених задатака сусреће се тзв. непотпуна зависност. Појам непотпуне зависности најбоље се може упознати на примерима.

Например, производ два броја зависи од свакога од њих, а не само од њиховог збира — али ипак производ зависи и од збира. Из познате идентичности

$$ab = \frac{1}{4}[(a+b)^2 - (a-b)^2] \tag{1}$$

види се да производ два броја зависи од збира и разлике тих бројева, и то да расте кад збир расте (а разлика остаје непромењена), а да опада кад разлика расте (а збир остаје непромењен).

Ако a и b нису негативни бројеви ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$) онда је апсолутна вредност разлике $a - b$ увек мања од апсолутне вредности збира $a + b$:

$$0 \leqslant (a-b)^2 \leqslant (a+b)^2.$$

То значи да производ постиже своју најмању вредност (0) кад је $|a-b| = |a+b$ (тј. кад је $a = 0$ или $b = 0$), а своју највећу вредност $\left(\frac{1}{4}(a+b)^2\right)$ кад је $|a-b| = 0$, тј. кад је $a = b$. Према томе вреди неједнакост

$$0 \leqslant ab \leqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^2.$$

Овом неједнакости је исказана непотпуна зависност производа два позитивна броја од њиховог збира.

2. Предмет овог чланка је решавање непотпуно одређеног задатка:

У троуглу је позната једна страна и њој супротни угао. Шта се зна о површини троугла и збиру непознатих страна?

Нека је $\triangle ABC$ посматрани троугао ($BC=a$, $CA=b$, $AB=c$, $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle CBA=\beta$, $\sphericalangle ACB=\gamma$), и нека су дати елементи: страна c и угао γ.

Из косинусне теореме

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \tag{2}$$

и обрасца за површину троугла

$$P = \frac{1}{2}ab\sin\gamma \tag{3}$$

изводе се два обрасца који су потребни у току решавања.

а) Десна страна једначине (2), кад јој се дода $-2ab + 2ab$ постаје:

$$c^2 = (a-b)^2 + 2ab(1-\cos\gamma). \tag{4}$$

Како је из обрасца (3)

$$ab = \frac{2P}{\sin\gamma}$$

а осим тога идентички:

$$\frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma} = \operatorname{tg}\frac{\gamma}{2}$$

једначина (4) добија облик

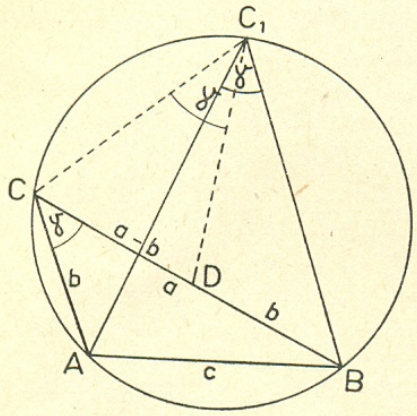
$$c^2 = (a-b)^2 + 4P\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} \tag{5}$$

или

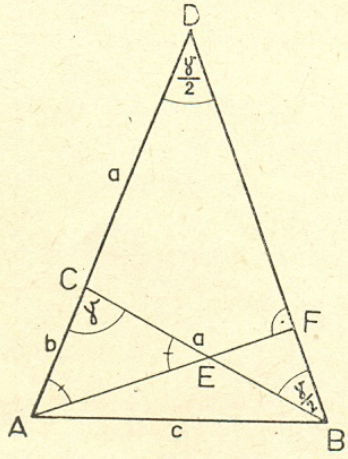
$$P = \frac{c^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2} - \frac{(a-b)^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}. \tag{5'}$$

Израз $\frac{m^2}{4} cotg \frac{\gamma}{2}$ [1]) претставља површину равнокраког троугла чија је *основица* m *и њој супротан угао* γ. *Према томе* образац (5) казује *да је површина троугла* ABC *једнака разлици површина два слична равнокрака троугла чије су основице* c *и* $a - b$, *а углови наспрам њих једнаки углу* γ.

Образац (5′) може се доказати и чисто геометриским путем (сл. 1). Око троугла ABC описан је круг, па је над $AB = c$ конструисан равнокраки троугао ABC_1 са углом γ у темену C_1. На страну $BC = a$ пренета је страна $AC = BD$, што значи да $CD = a - b$. Најзад су тачке D и C спојене са C_1. Тада је $\triangle ACC_1 \cong \triangle BDC_1$, јер је $AC = BD$, $AC_1 = BC_1$, $\sphericalangle CAC_1 = \sphericalangle DBC_1$. (Зашто?). Из поменуте подударности следује $CC_1 = DC_1$, $\sphericalangle CC_1D = \gamma$ (Зашто?) што значи да је $\triangle CDC_1$ равнокрак и сличан троуглу ABC_1.



Сл. 1



Сл. 2

На основу тога следује:

површ. BC_1C = површ. BC_1D + површ. CDC_1 = површ. AC_1C + површ. CDC_1

па је површ. ABC = површ. ABC_1C — површ. BC_1C = = површ. ABC_1C — површ. AC_1C — површ. CDC_1,

тј. површ. ABC = површ. ABC_1 — површ. CDC_1.

а то је једначина (5).

б) Из једначине (2), на исти начин као и једначина (4), добија се и једначина

(6) $$c^2 = (a + b)^2 - 2ab(1 + cos\,\gamma).$$

Како је $$1 - cos\,\gamma = 2sin^2\frac{\gamma}{2}, \qquad 1 + cos\,\gamma = 2cos^2\frac{\gamma}{2},$$

једначине (4) и (6) добијају облике

$$c^2 = (a - b)^2 + 4ab\,sin^2\frac{\gamma}{2},$$

$$c^2 = (a + b)^2 - 4ab\,cos^2\frac{\gamma}{2}.$$

Кад се из ових једначина елиминише производ ab, добија се једначина

(7) $$c^2 = (a + b)^2 sin^2\frac{\gamma}{2} + (a - b)^2 cos^2\frac{\gamma}{2}, \quad \text{тј.}$$

(7′) $$(a + b)^2 = \frac{c^2}{sin^2\frac{\gamma}{2}} - (a - b)^2 cotg^2\frac{\gamma}{2}.$$

---

[1]) Нека то сам читалац докаже.

И до ове једначине може се доћи геометриским путем (сл. 2). Страна AC троугла ABC продужи се преко C за $CD = BC = a$, па се тачка D споји са B. Затим се повуче $AF \perp BD$. Нека је E пресек дужи BC и AF. Тада је $\sphericalangle CDB = \sphericalangle CBD = \frac{\gamma}{2}$, па је и $\triangle AEC$ равнокрак (Зашто?), те је $CE = b$, $EB = a - b$. Тако из троуглова AFD и BFE следује:

$$AF = (a + b)\sin\frac{\gamma}{2}, \quad BF = (a - b)\cos\frac{\gamma}{2},$$

па се применом Питагорине теореме на $\triangle ABF$ добија једначина (7).

3. Сад се може приступити решавању постављеног задатка. Ради тога ваља посматрати једначине (5′) и (7′). Из њих се види да P и $a + b$ зависе од c, γ и $a - b$* и да — кад су дати c и γ — постижу своје максималне вредности за $a - b = 0$, тј. кад је троугао ABC равнокрак. Према томе из једначина (5′) и (7′) следују неједнакости:

$$P \leqslant \frac{c^2}{4}\operatorname{cotg}\frac{\gamma}{2}, \tag{8}$$

$$a + b \leqslant \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{9}$$

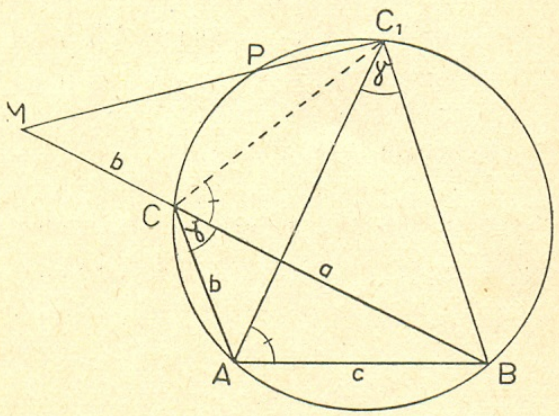
Како је осим тога $c < a + b$, последња неједнакост постаје

$$c < a + b < \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}. \tag{10}$$

Неједнакости (8) и (10) претстављају решења постављеног задатка. Ако је нпр. $\gamma = 150°$, неједнакост (10) постаје

$$c < a + b \leqslant (\sqrt{6} - \sqrt{2})\,c\ (= 1{,}0352\ldots\ c).$$

За $\gamma = 90°$ неједнакост (10) своди се на познату неједнакост



Сл. 3

$$c < a + b \leqslant c\sqrt{2}$$

коју задовољавају хипотенуза и збир катета правоуглог троугла.

До неједнакости (10) може се доћи и много краћим путем. Например, посматрањем екстремних вредности збира $\sin\alpha + \sin\beta$, кад је трећи угао γ троугла ABC дат. Иста неједнакост може се доказати и чисто геометриским путем.

Сл. 3 постала је допуном сл. 1. Страна BC троугла ABC продужена је преко C за $CM = AC = b$, па је тачка M спојена са C_1. Како је

$$\sphericalangle C_1CB = \sphericalangle C_1AB = 90° - \frac{\gamma}{2},$$

то је $\sphericalangle MCC_1 = \sphericalangle ACC_1$ па је $\triangle MCC_1 \cong \triangle ACC_1$, што значи да је $MC_1 = AC_1 = BC_1$, тј. да је $\triangle MBC_1$ равнокрак. Из овог троугла следује $MB < MC_1 + BC_1$ тј.

$$a + b < 2\,BC_1 = \frac{c}{\sin\frac{\gamma}{2}}.$$

Напомена: Нека читалац сам покаже да из троугла ABF (сл. 2) непосредно следују тангентна теорема и Гаусови обрасци. (Показати прво да је $\sphericalangle BAF = \frac{\alpha - \beta}{2}$).

---

* Непотпуна зависност од c и γ.

Modeli atomske jezgre

DR. GAJA ALAGA, Zagreb

Prije nego prijeđemo na samu diskusiju pojedinih modela atomske jezgre želimo podsjetiti čitaoce na neke poznate stvari iz atomske i molekularne fizike.

Danas svatko zna, da su atomi, ti najsitniji dijelovi kemijskih elemenata, sastavljeni iz atomske jezgre i elektrona koji oko nje kruže. Atomska jezgra sadržava gotovo cijelu masu atoma i nosi pozitivni naboj. Naboj pojedinih atomskih jezgri je uvijek cjelobrojni višekratnik elementarnog pozitivnog naboja i on se obično bilježi sa Z. Električna privlačna sila između elektrona i jezgre je zapravo ono što prisiljava elektrone da se kreću oko jezgre. Neutralni atomi imaju isti broj elektrona kao što im je i redni broj Z, t. j. naboj jezgre, jer se samo tako mogu dobiti neutralne tvorevine. U ovoj situaciji nam se prirodno nameće pitanje, da li se elektroni oko jezgre giblju bilo kako, ili po nekom određenom zakonu, uređeno. Po zakonima klasične mehanike i elektrodinamike oni bi se mogli gibati u bilo kakovim elipsama u čijem se žarištu nalazi jezgra. (Analogija Sunčevom planetnom sistemu). Međutim ispitivanja atomskih spektara, koji se sastoje iz linija određene frekvencije ukazala su na to, da zakone klasične elektrodinamike i mehanike moramo nadopuniti sa nekim dodatnim uvjetima. Spektralne linije određene frekvencije je moguće dobiti, ako pretpostavimo, da elektroni atoma mogu boraviti u elipsama sa određenom energijom. Emisija i apsorpcija svjetlosti događa se u tome slučaju tako, da elektron prijeđe iz jedne elipse u drugu i da pri tome emitira ili apsorbira jedan *kvant svjetlosti*. Vidimo, da su ustvari dodatni uvjeti, postojanje određenih stanja (elipsa), u kojima elektron može boraviti, a da ne zrači i novo shvatanje o emisiji i apsorpciji.[1] Naime, za razliku od klasične predodžbe o emisiji i apsorpciji, koja se događa neprekidno, kad se naboji ubrzavaju ili usporuju, — ovdje nam se ti procesi javljaju, kad elektron skače iz jednog stanja u drugo. Emitirana svjetlost je određene valne dužine ili frekvencije, koja je dana sa razlikom energija početnog i konačnog stanja

$$E_p - E_k = h\nu.$$

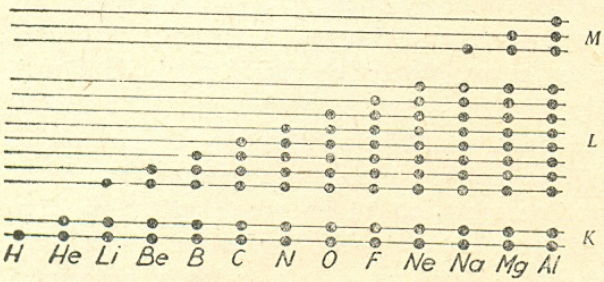
E_p i E_k su energije konačnog i početnog stanja elektrona, dok je ν frekvencija emitirane svjetlosti; h je konstanta proporcionalnosti poznata pod imenom Planckove konstante. E_k i E_p zapravo pretstavljaju jedan čitav niz stanja sa određenim energijama. Da bi ih međusobno razlikovali uveli smo indekse p i k ili kako se još obično zovu kvantni brojevi.

Objašnjenje spektara zahjevalo je, da pored kvantizacije energije uvedemo i kvantizaciju impulsa vrtnje. Kao što to tražimo za energiju, očekujemo i za impuls vrtnje, da može poprimiti samo određene vrijednosti. Za numeriranje stanja impulsa vrtnje možemo uvesti također jedan kvantni broj koga možemo označiti na pr. sa l. Vidimo dakle da je specifikacija stanja atoma dana kvantnim brojevima. Pitamo se, od čega ovise ti kvantni brojevi i kako ih možemo naći. Naravno, da oni ovise o silama, koje drže sistem na okupu i o daljnim nuz-uvjetima, kojima je sistem podložan. Naći ih možemo, ako formuliramo matematski i sistem i nuz-uvjete, pa problem riješimo.

---

[1] Kvantizaciju je prvi u fiziku uveo Max Planck 1900. pretpostavljajući, da se energija harmoničkog oscilatora, koji titra frekvencijom ν, može mijenjati samo za cjelobrojne višekratnike od ν dakle $E = n \cdot h\nu$. To je Planck načinio, da bi objasnio zračenje crnog tijela. Prvu hipotezu o kvantima svjetlosti je načinio Albert Einstein 1905. da objasni fotoefekt, dok su prvi modeli atoma zasluga Ernesta Rutherforda i Nielsa Bohra.

Dosada smo se ograničili na promatranje energije i impulsa vrtnje. To je impuls vrtnje, koga ima elektron s obzirom na os Z t. j. onu os koja je okomita na ravninu elipse, a prolazi kroz jezgru. Energija elektrona ovisi pak o njegovoj brzini i položaju prema jezgri. Prvi dio energije zovemo kinetičkom, dok drugi potencijalnom energijom. No, kako znamo, impuls vrtnje ovisi također o brzini i udaljenosti čestice od osi vrtnje tako, da smo dosada razmatrali samo veličine ili stupnjeve slobode sistema koji ovise o koordinatama, kao i brzinama[1]. Iskustvo nas uči da i pored tih stupnjeva slobode postoje još i drugi, a to su oni koji se odnose na vlastitu rotaciju elektrona. To je vlastiti impuls vrtnje ili spin elektrona[2].



Sl. 1. Iz knjige: Supek, Teorijska fizika II

Tako smo sada našli sve kvantne brojeve, koji se odnose na elektron u atomu. To su n, l i s: n služi za oznaku energije l impulsa vrtnje, dok s spina.

Neke spektralne linije, koje bi se očekivale na temelju dosada rečenoga su u spektrima otsutne. Što je zapravo ono, što zabranjuje, da se takvi prijelazi ne događaju, da se takve linije ne pojave? To je još jedan daljnji princip moderne fizike, koji izriče, da ne mogu biti u atomu dva elektrona u istom stanju, dakle, sa istim kvantnim brojevima — to je tako zvani Paulijev princip.

Na temelju ove potpune slike možemo sada načiniti model periodskog sistema elemenata. Shemu toga možemo vidjeti na slici 1[3]. Polazeći od vodika, koji ima samo jedan elektron, vidimo, da periodski sistem izgrađujemo tako, da novo pridošli elektron stavimo u novo stanje. Sa dva elektrona smo popunili prvu t. zv. K-ljusku atoma, L-ljuska sadržava 8 elektrona i t. d. Atomi sa zatvorenim ljuskama su plemeniti plinovi, kao što je to dobro poznato, i pretstavljaju vrlo stabilne tvorevine i kemijski su neaktivni. To možemo tumačiti i time, da takvi atomi radi popunjenih ljusaka ne privlače više elektrone drugih atoma, dakle su zasićeni, za razliku od halogenih i onih elemenata, koji imaju jedan elektron više odnosno manje od pune ljuske, pa rado stupaju u reakciju. Kemijske osobine atoma dane su, dakle, sa brojem elektrona izvan punih ljusaka.

Možemo sada u nekoliko riječi sumirati sve ono, što će nam iz ovoga djela biti dalje potrebno. Karakter sila između jezgre i elektrona, kvantizacija i Paulijev princip zabrane određuju ljuskastu strukturu atoma[4]. Gdje će se pojaviti veliki energetski skokovi ovisi, dakle, o svojstvima atomskog sistema.

Isto tako, od prije znamo, da se pojedini atomi ujedinjuju i tvore molekule. Molekula imamo dvo- i višeatomnih. Prirodno je, da pokušamo sada građu i svojstva molekula protumačiti na temelju kvantne teorije, koja se za atome pokazala veoma dobra. Prije svega, da uočimo koje su sličnosti, a koje razlike između atoma i molekula. Prije svega molekule u kojima ima više atoma, recimo podjednake težine, izvodit će nešto kompliciranije gibanje. Atomi će titrati oko svojih

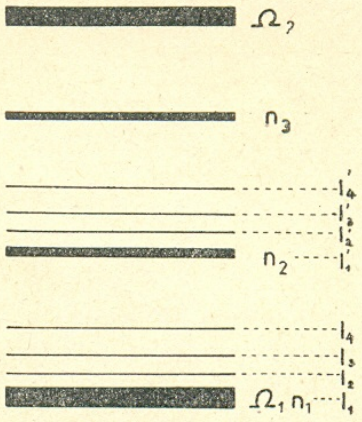
[1] Opću formulaciju kvantne mehanike dali su W. Heisenberg (1925) i E. Schrödinger (1926). Polazeći od dva na oko potpuno različita gledišta, oni su razradili ono, što se danas zove kvantna teorija.

[2] Goudsmit i Uhlenbeck (1926) načinili su hipotezu o spinu elektrona da bi objasnili Stern Gerlachove eksperimentalne nalaze o ponašanju atoma srebra u nehomogenom magnetskom polju.

[3] Nivoi ove sheme su dobiveni tako, da riješimo problem gibanja jedne čestice u centralnom potencijalu.

[4] Da postoji i prostorna podvojenost atomskih ljusaka možemo se uvjeriti ispitivanjem raspršenja rentgenskih zraka na atomima.

položaja ravnoteže, a elektroni će izvoditi svoje vrtnje oko pojedinačnih jezgri ili pak oko više njih (kovalentni elektroni). Naročito kod nekih jednostavnih dvoatomnih molekula možemo očekivati, da će podjela (separacija) između elektronskih gibanja i titranja atoma biti gotovo potpuna. Atomi će titrati u smjeru svoje spojnice, a osim toga će se vrtiti oko svog zajedničkog težišta. Tako, pored uobičajenih elektronskih prijelaza, ovdje će nam se javiti prijelazi vezani uz promjene titranja i vrtnje molekule. Shematski možemo situaciju prikazati i ovako: elektronske kvantne brojeve obilježimo sa Ω, one od titranja sa n, a one od vrtnje sa I (sl. 2.). Tako nam se na svaki elektronski nivo nadovezuje čitav niz vibracionih stanja. Svako vibraciono stanje nosi na sebi čitav niz rotacionih stanja. Frekvencija čestičnih linija je znatno veća od frekvencije rotacionih nivoa. Dakle za pobuđenje rotacionih nivoa su nam dovoljne i svjetlosne zrake relativno velikih valnih dužina. Molekularni spektri pokazuju, da su u nekim slučajevima zaista ostvarene naše pretpostavke.



Sl. 2.

Iz ovoga kratkog razmatranja o molekulama vidimo, da je tu situacija znatno kompliciranija nego kod atoma. Prije svega centralno polje jezgre kod atoma (koju možemo uzeti da miruje) zamijenilo je polje koje stvaraju sastavni dijelovi molekula. Ovo polje, za razliku od atomskog, nije statičko nego titra. Stoga smo dobili nove nivoe vezane uz tu vrstu gibanja, a to su rotacioni i vibracioni nivoi.

Naravno ne smijemo se zanositi, da su ove naivne slike stvarne fizikalne teorije; one naravno to nisu i nemaju pretenziju da budu. Svi ovdje iznesени rezultati dadu se međutim, opravdati strogim računom kvantne teorije, a slike nemaju osim ilustrativnog karaktera puno više vrijednosti.

Mi nismo nipošto obuhvatili sva zbivanja u atomskoj i molekularnoj fizici. Uzeli smo samo ona, na kojima se u stvari rodila i razvila kvantna teorija. Kvantnomehanički računi u glavnom se svode na to da iz poznatih sila, koje djeluju u sistemu rješavanjem jednadžbi, dobivamo ponašanje sistema. To je strogi račun, koji danas možemo u mnogim slučajevima provesti do kraja, jer znamo sile (uzajamno djelovanje) i teoriju, a primitivni modeli i ad hoc uvedene pretpostavke služile su samo za orijentaciju i sistematiku eksperimentalnih podataka.

(Svršit će se)

O aritmetičkim nizovima k-toga reda

STJEPAN ŠKARICA, Zagreb

1. *a*) Prirodni brojevi: 1, 2, 3, . . . , $(n-1)$, n, poredani tako po veličini, čine niz, kome je *opći* ili n-ti *član* $A_n = n$. Zbroj prvih n članova toga niza, shvaćen kao zbroj njihovih prvih potencija, bilježi se obično sa S_1. Da ga odredimo, pisat ćemo:

$$S_1 = 1 + 2 + 3 + \cdots + (n-1) + n$$
$$S_1 = n + (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1.$$

Ako zbrojimo brojeve dva po dva po stupcima, dobit ćemo $2S_1 = n(n+1)$, t. j. $S_1 = \dfrac{n(n+1)}{2}$ ili simbolički $S_1 = \binom{n+1}{2}$ (čitaj: $n+1$ *povrh* 2).

Simbol $\binom{m}{r}$, gdje je r cio pozitivan broj, ima vrijednost $\frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-r+1)}{r!}$; simbol $r!$ (čitaj: r *faktorijela*) znači produkt prvih r prirodnih brojeva, t. j. $r!=1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot(r-1)r$. Na pr. $\binom{8}{3}=\frac{8\cdot7\cdot6}{1\cdot2\cdot3}=8\cdot7=56$.

b) Na posve jednak način nalazimo, da je zbroj prvih n članova niza parnih brojeva $2+4+6+\cdots+(2n-2)+2n=n(n+1)$, a niza neparnih brojeva $1+3+5+\cdots+(2n-3)+(2n-1)=n^2$.

Dva posljednja zbroja možemo odrediti i s pomoću izraza za S_1, jer je $2+4+6+\cdots+2n=2(1+2+3+\cdots+n)=2S_1=n(n+1)$, a $1+3+5+\cdots+(2n-1)=(1+2+3+\cdots+2n)-(2+4+6+\cdots+2n)=n(2n+1)-n(n+1)=n^2$.

2. *a*) Ako u formuli $n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1)$ stavimo redom $n=1, 2, 3, \ldots, n$, dobit ćemo jednadžbe:

$$\begin{aligned}
&1\cdot2\cdot3-0\cdot1\cdot2=3\cdot1\cdot2,\\
&2\cdot3\cdot4-1\cdot2\cdot3=3\cdot2\cdot3,\\
&3\cdot4\cdot5-2\cdot3\cdot4=3\cdot3\cdot4,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&n(n+1)(n+2)-(n-1)n(n+1)=3n(n+1);
\end{aligned}$$

kad te jednadžbe zbrojimo, nalazimo, da je zbroj prvih n članova niza, kome je opći ili n-ti član $A_n=n(n+1)$, t. j. $1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)=2!\binom{n+2}{3}$.

b) Ako u formulu: $n(n+1)(n+2)(n+3)-(n-1)n(n+1)(n+2)=4n(n+1)(n+2)$ uvrstimo za n redom $1, 2, 3, \ldots, n$, izlazi zbrajanjem dobivenih jednadžbi, da je zbroj prvih n članova niza s općim članom $A_n=n(n+1)(n+2)$, t. j.

$$1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+3\cdot4\cdot5+\cdots+n(n+1)(n+2)=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)=3!\binom{n+3}{4}.$$

S obzirom na posljednja dva rezultata možemo odmah napisati, da je zbroj prvih n članova niza s općim članom $A_n=n(n+1)(n+2)(n+3)$ t. j. $1\cdot2\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4\cdot5+\cdots+A_n=\frac{1}{5}A_n(n+4)=4!\binom{n+4}{5}$, i t. d.

c) Na posve jednak način daje nam formula $(2n-1)(2n+1)(2n+3)-(2n-3)(2n-1)(2n+1)=6(2n-1)(2n+1)$, kad za n uvrstimo redom $1, 2, 3, \ldots, n$ i dobivene jednadžbe zbrojimo: $1\cdot3+3\cdot5+5\cdot7+\cdots+(2n-1)(2n+1)=\frac{1}{3}n(4n^2+6n-1)$. Opći član toga niza je $A_n=(2n-1)\cdot(2n+1)$. Ako je n-ti član niza $B_n=(2n-1)(2n+1)(2n+3)$, nalazimo istim načinom da je $1\cdot3\cdot5+3\cdot5\cdot7+5\cdot7\cdot9+\cdots+B_n=n(2n^3+8n^2+7n-2)$. Ako je n-ti član niza $C_n=(2n-1)(2n+1)(2n+3)(2n+5)$, onda je $1\cdot3\cdot5\cdot7+3\cdot5\cdot7\cdot9+\cdots+C_n=\frac{1}{5}n(16n^4+120n^3+280n^2+180n-71)$.

3. *a*) Kako je $(1^2+1)+(2^2+2)+(3^2+3)+\cdots+(n^2+n)=1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$ [gl. t. 2.*a*)], to je zbroj kvadrata prvih n prirodnih brojeva $S_2=1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$.

Tako je $(1^3-1)+(2^3-2)+(3^3-3)+\cdots+(n^3-n)=1\cdot2\cdot3+2\cdot3\cdot4+\cdots+(n-1)n(n+1)=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)$ [gl. t. 2.*b*)], i prema tome je zbroj kuba prvih n prirodnih brojeva $S_3=1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=\frac{1}{4}(n-1)n(n+1)(n+2)+S_1=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2=(1+2+3+\cdots+n)^2=S_1^2$.

c) Na osnovu rezultata pod 3.*a*) i *b*) nalazimo lako: $2^2 + 4^2 + 6^2 + \cdots + (2n)^2 = 2^2(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2) = \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1)$; $1^2 + 3^2 + 5^2 + \cdots + (2n-1)^2 = \frac{1}{6} \cdot 2n(2n+1)(4n+1) - \frac{2}{3} n(n+1)(2n+1) = \frac{1}{3} n(4n^2-1)$; $2^3 + 4^3 + 6^3 + \cdots + (2n)^3 = 2[n(n+1)]^2$; $1^3 + 3^3 + 5^3 + \cdots + (2n-1)^3 = n^2(2n^2-1)$.

d) Zbroj kuba prvih n prirodnih brojeva možemo odrediti i s pomoću formule $[(n^2-n)+1] + [(n^2-n)+3)] + \cdots + [(n^2-n)+(2n-1)] = n(n^2-n) + [1+3+5+\cdots+(2n-1)] = n^3 - n^2 + n^2 = n^3$. Kako je $n^2 - n$ paran broj za svako n, brojevi u uglastim zagradama su neparni brojevi; ima ih n i neprekinuti su dio niza neparnih brojeva. Opazit ćemo, da dio niza za n^3 svršava brojem $(n^2-n)+(2n-1) = n^2+n-1$, a dio niza za $(n+1)^3$ počinje brojem $(n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + n + 1 = (n^2+n-1) + 2$, dakle neparnim brojem, koji slijedi iza broja n^2+n-1. Tako dobivamo: $1 = 1^3$, $3 + 5 = 2^3$, $7 + 9 + 11 = 3^3$, i t. d. Stoga je

$$S_3 = 1 + 3 + 5 + \cdots + (n^2 + n - 1) = \left(\frac{n^2+n}{2}\right)^2 = S_1^2.$$

4. Zbroj potencija prvih n prirodnih brojeva s jednakim eksponentom k, t. j. $S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$, može se odrediti, ako su nam poznate sume $S_1, S_2, S_3, \ldots S_{k-1}$. Odredimo najprije S_1! Nalazimo:

$$\begin{aligned}
(1+1)^2 &= 1^2 + 2 \cdot 1 + 1 \\
(2+1)^2 &= 2^2 + 2 \cdot 2 + 1 \\
(3+1)^2 &= 3^2 + 2 \cdot 3 + 1 \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
(n+1)^2 &= n^2 + 2 \cdot n + 1.
\end{aligned}$$

Kad te jednadžbe zbrojimo, izlazi $(n+1)^2 = 1 + 2S_1 + n$, a odatle je $S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$.

S pomoću S_1 možemo sad odrediti S_2 na jednak način na osnovu formule $(n+1)^3 = n^3 + 3n^2 + 3n + 1$; ako u nju stavimo za n redom $1, 2, 3, \ldots, n$, i dobivene jednadžbe zbrojimo, dobit ćemo $(n+1)^3 = 1 + 3S_2 + 3S_1 + n$, i odatle $S_2 = \frac{1}{3}(2n+1)S_1 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$.

Iz $(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 4S_1 + n$ nađemo $S_3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$, iz $(n+1)^5 = 1 + 5S_4 + 10S_3 + 10S_2 + 5S_1 + n$ dobijemo $S_4 = \frac{1}{30} n(n+1)(6n^3 + 9n^2 + n - 1)$, a zatim slično $S_5, S_6, \ldots$ i napokon S_k iz jednadžbe

$$(n+1)^{k+1} = 1 + \binom{k+1}{1} S_k + \binom{k+1}{2} S_{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k-1} S_2 + \binom{k+1}{k} S_1 + n.$$

Prema posljednjoj jednadžbi vidimo, da je S_k polinom u n, i to $(k+1)$ stepena; kako je $(n+1)^{k+1} - (n+1) = (n+1[(n+1)^k - 1] = n(n+1)[(n+1)^{k-1} + (n+1)^{k-2} + \cdots + (n+1) + 1]$, za $k = 1$ izlazi, da je S_1 djeljiv sa $n(n+1)$, da je i S_2, a zatim $S_3, S_4, \ldots$ i napokon S_k djeljiv sa $n(n+1)$, kako se vidi iz izraza za S_1, S_2, S_3 i S_4.

5. *a*) *Definicija: Ako opći ili n-ti član nekoga niza ima oblik* $A_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$, *gdje su koeficijenti* a_k *do* a_0 *realni brojevi, i* $a_k \neq 0$, *niz se zove aritmetički k-toga reda.*

Primjeri: 1. $A_n = 2n - 7$; niz je aritmetički prvog reda, a članovi su mu redom: $-5, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots$; 2. $A_n = 5n^2 - 10n - 1$; niz je aritmetički drugog reda, a članovi su mu redom: $-6, -1, 14, 39, 74, \ldots$ 3) $A_n = n^3 + n^2 + 1$; niz je aritmetički trećeg reda, a članovi su mu redom: 3, 13, 37, 81, 151, 253, ...

Svi nizovi u točkama 1. do 4. su su aritmetički 1. ili višeg reda.

b) *Poučak: Zbroj prvih n članova aritmetičkoga niza k-toga reda je polinom u n,* i to $(k+1)$ · stepena, i djeljiv je sa n.

Dokaz: Neka je $A_n = a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + \cdots + a_1 n + a_0$! Suma prvih n članova niza je $s_n = a_k S_k + a_{k-1} S_{k-1} + \cdots + a_1 S_1 + a_0 n$. Polinom na desnoj strani je $(k+1)$ · stepena

u n, jer je $a_k \neq 0$, S_k je $(k+1)$ · stepena u n (t. 4.); S_k je djeljiv sa n, jer su svi njegovi članovi djeljivi sa n (t. 4.). Prema tome je s_n oblika $s_n = b_{k+1}n^{k+1} + b_k n^k + \cdots + b_2 n^2 + b_1 n$, i kako to potvrđuju primjeri u točkama 1. do 4.

c) Očito je $s_n - s_{n-1} = A_n$; s pomoću te jednadžbe možemo t. zv. *metodom neodređenih koeficijenata* iz izraza za A_n naći izraz za s_n, i obrnuto.

Primjeri: **1.** $A_n = 2n - 7$; $s_n = b_2 n^2 + b_1 n$; $s_{n-1} = b_2 (n-1)^2 + b_1 (n-1)$; $s_n - s_{n-1} = 2b_2 n - (b_2 - b_1) = 2n - 7$; budući da posljednja jednadžba vrijedi za svako n, mora biti $2b_2 = 2$, $b_2 - b_1 = 7$; odatle je $b_2 = 1$, $b_1 = -6$, $s_n = n^2 - 6n = n(n-6)$. Za aritmetički niz 1. reda vrijedi, kako znamo, formula $s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$; ovdje je $a_1 = -5$, $a_n = 2n - 7$, pa izlazi $s_n = \frac{n(2n-12)}{2} = n(n-6)$.

2. $A_n = 5n^2 - 10n - 1$; $s_n = b_3 n^3 + b_2 n^2 + b_1 n$; $s_n - s_{n-1} = 3b_3 n^2 - (3b_3 - 2b_2)n + (b_3 - b_2 + b_1) = 5n^2 - 10n - 1$; odatle je $3b_3 = 5$; $3b_3 - 2b_2 = 10$; $b_3 - b_2 + b_1 = -1$; $b_3 = \frac{5}{3}$, $b_2 = -\frac{5}{2}$, $b_1 = -\frac{31}{6}$, $s_n = \frac{1}{6}n(10n^2 - 15n - 31)$.

3. Odredimo ovim načinom sumu bikvadrata prvih n prirodnih brojeva!

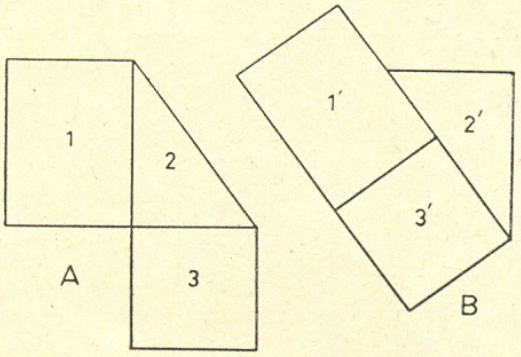
Rješenje: $A_n = n^4$; $s_n = S_4 = b_5 n^5 + b_4 n^4 + b_3 n^3 + b_2 n^2 + b_1 n$; $s_n - s_{n-1} = 5b_5 n^4 - (10b_5 - 4b_4)n^3 + (10b_5 - 6b_4 + 3b_3)n^2 - (5b_5 - 4b_4 + 3b_3 - 2b_2)n + (b_5 - b_4 + b_3 - b_2 + b_1) = n^4$. Iz jednakosti koeficijenata na lijevoj i desnoj strani nalazimo: $b_5 = \frac{1}{5}$, $b_4 = \frac{1}{2}$, $b_3 = \frac{1}{3}$, $b_2 = 0$, $b_1 = -\frac{1}{30}$, i prema tome je $s_n = S_4 = \frac{1}{5}n^5 + \frac{1}{2}n^4 + \frac{1}{3}n^3 - \frac{1}{30}n$.

(Svršit će se)

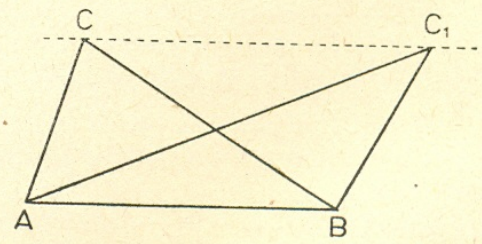
O jednako sastavljenim poligonima

Б. СТАНОЈЕВИЋ, Београд

Pojam jednako sastavljenih figura svakako je učenicima poznat. Ipak potsećamo: Za dve figure kažemo da su jednako sastavljene (ili da su jednakog sastava) ako se mogu razložiti na parno podudarne delove, tj. ako se obe mogu podeliti na isti broj delova tako da za svaki deo jedne postoji podudarni deo druge figure. Drugim rečima: ako se jedna figura može razložiti tako da se od njih sastavi druga figura. Na pr. figure A i B na sl. 1.



Sl. 1

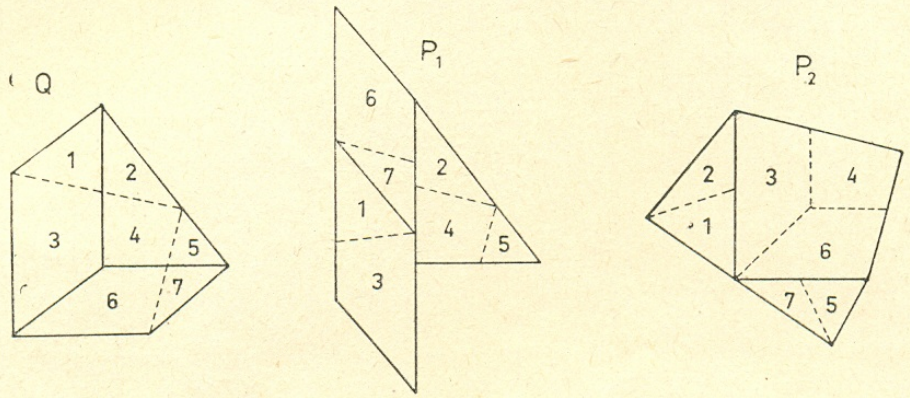


Sl. 2

Jasno je da takve slike imaju i jednake površine, i taj osnovni stav: Jednako sastavljene slike su jednake (po površini) koristi se za izvođenje pravila za izračunavanje površina raznih praволinijskih figura, time što dokazujemo (metodom razlaganja a nekad i dopunjavanja) da dotična figura ima jednak sastav sa nekom drugom, za koju već znamo pravilo izračunavanja površine.

Питање је сада да ли је тачан и обрнути став, тј. једнаке слике да ли су увек и једнаког састава. На први поглед изгледа на пр. да троуглови ABC и ABC_1 на сл. 2, који су једнаки (уколико је $CC_1 \| AB$) нису једнако састављени тј. да се један не може разложити на делове, из којих би се саставио други.

Међутим тај обрнути став, уколико се односи на полигоне ипак је тачан и познат под именом: *Бољај-Гервинова теорема* (јер су то први доказали скоро истовремено мађарски математичар Бољај 1832 год. и немачки Гервин 1833. год.).

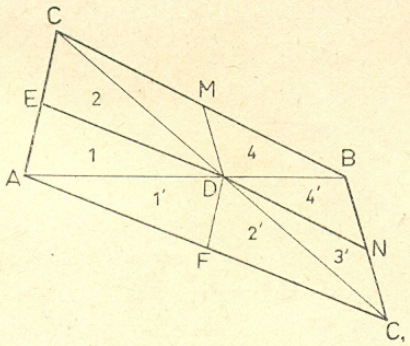


Сл. 3

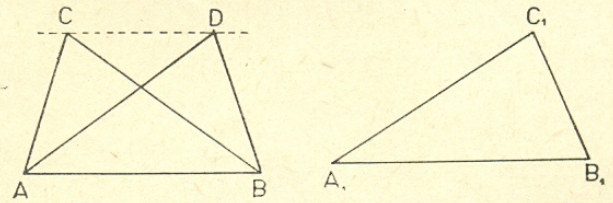
Изложићемо (не сасвим потпуно) један од начина доказивања те теореме, тиме што ћемо најпре извести неколико помоћних теорема.

Прва помоћна теорема: Ако су два полигона једнаког састава са трећим, онда су и међусобно једнако састављени. (Такозвана особина транзитивности; аналогија са аксиомом транзитивности: ако су две величине једнаке са трећом онда су и међусобно једнаке).

Доказ: Ако су полигони P_1 и P_2 једнаког састава са полигоном Q (сл. 3) онда се Q може разложити на делове који чине P_1, и такође на други начин (на сл. 3 испрекиданим линијама) на делове који чине P_2.



Сл. 4



Сл. 5

Разлагањем на оба начина Q је подељен у ствари на мање делове који се морају садржати у полигонима P_1 и P_2. Дакле полигони P_1 и P_2 су једнаког састава.

Друга помоћна теорема: Два једнака троугла, који имају по једну једнаку страну, су једнако састављени.

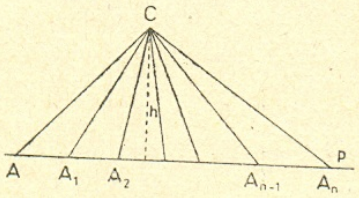
Доказ: Кад су им једнаке по једна страна морају им бити једнаке и висине тих страна. Да се докаже једнакост састава два таква троугла (на пр. они са сл. 2), треба их поставити један уз други да им се поклопе једнаке стране (сл. 4) и спојити темена C и C_1. Повлачењем из добијене тачке D: $DE \| AC_1$, $DF \| AC$, $DM \| BC_1$ и $DN \| BC$, на основу теореме о средњој линији троугла лако се уочава подударност делова 1 и 1′,

2 и 2′, итд. (да је $CD = C_1D$ лако се види с обзиром да оба троугла имају једнаке висине стране AB)

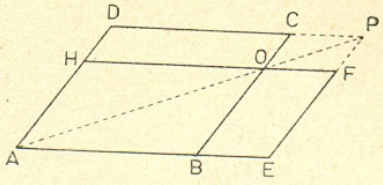
Трећа помоћна теорема: Два једнака троугла су увек једнаког састава.

Доказ: Ако два једнака троугла ABC и $A_1B_1C_1$ (сл. 5) немају ни једну страну једнаку, онда један од њих на пр. ABC претворимо у ABD тако да је $AB = A_1C_1$. По претходној теореми ABC и ABD су једнаког састава а такође и ABD и $A_1B_1C_1$. Дакле, према првој помоћ. теореми и ABC и $A_1B_1C_1$ су једнаког састава.

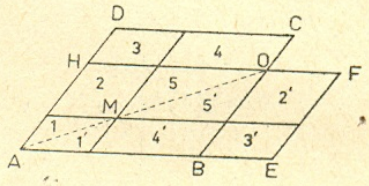
Четврта помоћна теорема: Сваки полигон је једнако састављен са неким њему једнаким троуглом.



Сл. 6



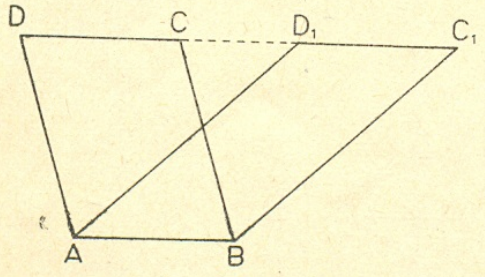
Сл. 7



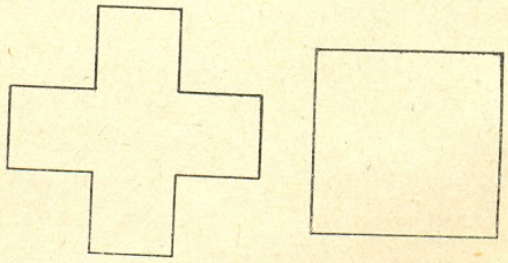
Сл. 8

Доказ: Сваки полигон може се разложити на троуглове. Сваки од тих добијених троуглова може се претворити у неки други троугао, са којим ће, по претходној теореми, имати једнаки састав. Изабраћемо те друге троуглове тако да сви имају заједничку висину h а њихове основице: a_1, a_2, a_3, . . . да буду постављене на истој правој p (сл. 6). Пошто су троуглови, на које смо разложили дати полигон, једнаког састава са троугловима AA_1C, A_1A_2C, A_2A_3C, итд. значи да је дати полигон једнаког састава са троуглом AA_nC.

Из ових помоћних теорема произлази сада *Бољај-Гервинова теорема: Два једнака полигона увек су једнаког састава*. Наиме ако су два полигона једнака, то по претходној теореми постоји троугао једнаког састава са једним полигоном, и постоји други троугао једнако састављен са другим полигоном. Та два троугла су међусобно једнаког састава по трећој помоћ. теореми, дакле и дати полигони су једнаког састава.



Сл. 9



Сл. 10

Уствари једнакост састава два једнака полигона може се често директно показати, независно од наведеног тока доказа уопште. Н. пр. познат је још у осмогодишњој школи задатак претварања датог паралелограма у други са промењеном основицом (сл. 7). Такође је ученицима познат и доказ једнакости површина по два паралелограма $ABCD$ и $AEFH$.

Како се за ова два паралелограма може показати да су једнаког састава? Једноставно се узме тачка M на дијагонали тако да $AM = OP$ и из тачке M повлачењем паралела (сл. 8) уочава се затим подударност одговарајућих делова оба паралелограма.

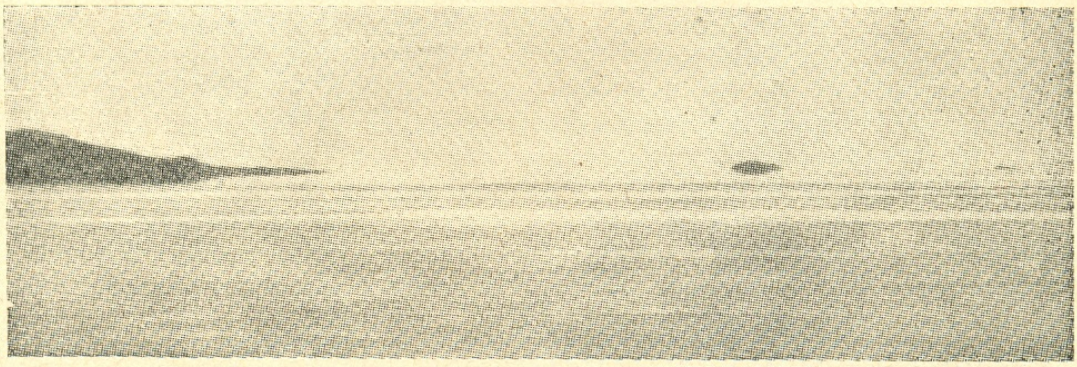
На крају остављамо читаоцима да сами докажу директно једнакост састава паралелограма $ABCD$ и ABC_1D_1 на слици 9 као и једнакост састава фигура на сл. 10, што, надамо се, неће бити нарочито тешко.

Тај други задатак се често даје у популарном облику: дати квадрат изрезати на делове из којих се може саставити фигура облика крста.

Zanimljive optičke pojave na Jadranu

ANTE BONEFAČIĆ, Zagreb

Svi smo učili i čitali o fata morgani (od arapske riječi fatamurgan = vila kojoj se pripisivalo stvaranje zrcaljenja u uzduhu), koja nastaje totalnom refleksijom svjetlosti u užarenoj afričkoj pustinji. Netko od čitalaca ju je možda opazio i kod nas na autoputu. Slična zanimljiva optička pojava, dešava se kod nas na jadranskoj obali. Svi koji žive na moru, sigurno su zapazili pojavu koju prikazuje slika 1. Rtovi udaljenih poluotoka, otoka, čitavi otočići i udaljeni brodovi čine nam se kao da lebde u zraku, a ispod njih zrcali se njihova obrnuta slika, koja je obično manje uočljiva i nejasna.

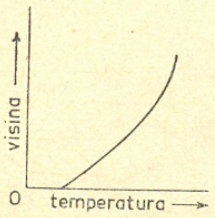


Sl. 1.

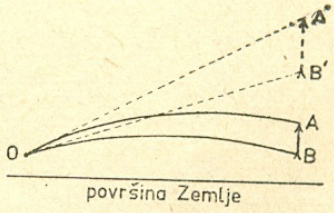
Ta se pojava u meteorologiji naziva miraž (od franc. riječi mirage = zrcaljenje) i može se objasniti zakonom loma svjetlosti. Lom nastaje u slojevima uzduha različite temperature, jer slojevi različite temperature imaju i različitu gustoću kao i različit indeks loma. Pri prelazu iz jednog takvog sloja u drugi prešla je svjetlost u sredstvo drugog indeksa loma, pa će promijeniti svoj smjer. Promjenu smjera opisuje nam Snellov zakon loma $\sin u / \sin l = n_1 / n_2$, gdje je u kut upadanja, l kut loma, n_1 i n_2 indeksi loma dvaju sredstava, u našem slučaju dvaju slojeva uzduha različite temperature.

Promotrimo najprije dva jednostavna slučaja prolaza zrake svjetlosti kroz slojeve uzduha nejednolike temperaturne razdiobe.

Raste li temperatura uzduha naglo sa visinom, kao što je prikazano na slici 2a, zraka svjetlosti će se lomiti pri prijelazu iz toplijih u hladnije slojeve, a to znači iz slojeva manje u slojeve veće gustoće, prema okomici.



Sl. 2.a



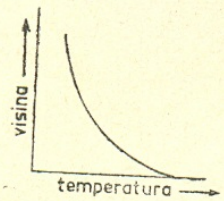
Sl. 2.b

Kako svaki predmet vidimo u smjeru u kojem nam zraka svjetlosti ulazi u oko, to ćemo predmet AB u slici 2b vidjeti ne u njegovom pravom položaju, već uzdignutog, vidjet ćemo zapravo ne predmet AB, već njegovu uzdignutu sliku $A'B'$. O momentalnoj temperaturnoj raspodjeli ovisi da li će ta slika biti manja, jednaka ili veća od predmeta. U slučaju linearnog opadanja gustoće sa visinom $AOB = A'OB'$, slika je jednako velika kao i predmet. Ako je promjena gustoće nelinearna, tako da je zraka AO zakrivljena više od zrake BO, slika je rastegnuta. Obrnuto, ako je

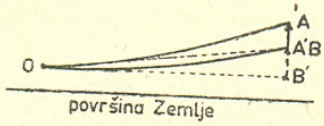
zakrivljenost zrake *AO* manja nego *BO*, slika je skraćena. Pri temperaturnoj raspodjeli prikazanoj na slici 2a, slika *A'B'* predmeta *AB* bit će uzdignuta i rastegnuta.

Prividno uzdizanje opaža se često na morskoj obali, ili na otvorenom moru, u slučaju kada je sloj uzduha neposredno uz more znatno hladniji, znači i znatno gušći od gornjih slojeva.

Obrnut slučaj imat ćemo, ako temperatura uzduha naglo opada sa visinom kao na slici 3a. Predmet će nam se sada činiti spušten i skraćen kao što se može razabrati iz slike 3b. Naravno, pri takvoj temperaturnoj razdiobi topli zrak će strujati prema gore, pa će čitava slika treperiti i biti nejasna.



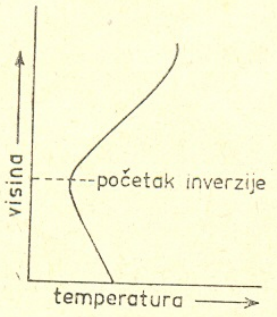
Sl. 3.a



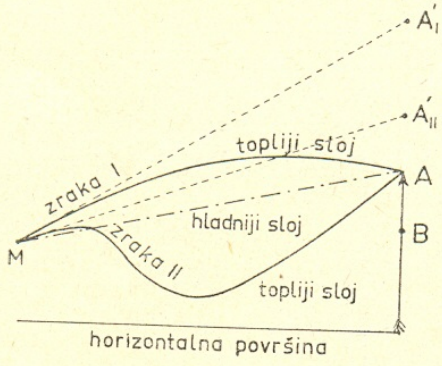
Sl. 3.b

Pri pojavi miraža razdioba temperature s visinom je takva, da zrake svjetlosti koje dolaze iz jedne te iste točke nekog objekta na velikoj udaljenosti od motritelja, putuju različitim putovima i dolaze mu u oko pod različitim kutovima. Motritelj stoga vidi dvije slike jedne te iste točke odvojene u prostoru. Namjesto jednog predmeta vidi njegovu dvostruku sliku. Osim abnormalne raspodjele gustoće uzduha pri tom je važan i položaj promatranog objekta kao i motritelja prema slojevima abnormalne gustoće. Uslijed male promjene položaja pojava može nestati. Tako vidimo kod većih otoka kako lebde samo pojedini rtovi, koji se nalaze na pogodnoj udaljenosti, dok ostali dio otoka vidimo normalno.

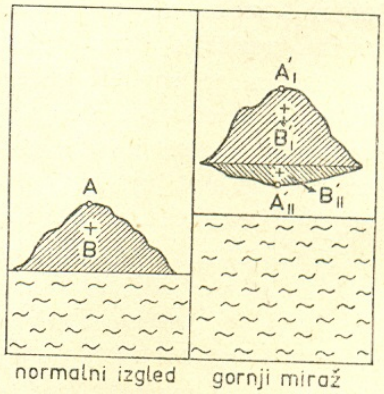
Postanak t. zv. gornjeg miraža objasnit ćemo pomoću slike 4. On nastaje pri temperaturnoj razdiobi prikazanoj na slici 4a. Vidimo da temperatura iznad tla, odnosno mora, najprije opada, zatim na visini od nekoliko metara (početak inver-



Sl. 4.a



Sl. 4.b



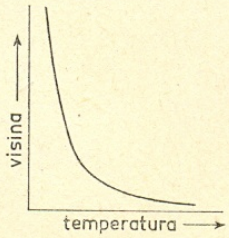
Sl. 4.c

zije) počinje da raste s visinom. Takvi uslovi mogu nastati na moru pri naglom rashlađivanju uzduha, na primjer nakon pljuska. Tada može biti nekoliko metara nad morem temperatura uzduha niža nego što je temperatura površine mora, odnosno sloja uzduha neposredno nad morem.

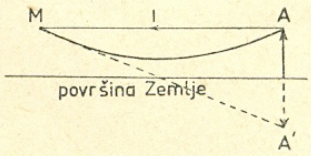
Slika 4b prikazuje nam put zraka svjetlosti sa točke *A* nekog objekta, na primjer otočića prikazanog na slici 4c. Iz te točke reflektiraju se sunčane zrake na sve strane. Nas interesiraju one zrake koje dolaze u oko motritelja *M*. Pri prikazanoj temperaturnoj razdiobi desit će se da u oko motritelja stignu sa točke *A* ne jedna, već dvije zrake I i II. One su išle različitim putovima i stigle u motrite-

ljevo oko pod različitim kutovima. Zbog toga će motritelj točku A vidjeti dvostruko. Pričinjat će mu se naime da vidi dvije točke A u smjeru MA'_I i MA'_{II}. Stvarno točka A leži u smjeru MA.

Na slici vidimo da su slike točke A uzdignute iznad stvarne točke A. Promotrimo li na isti način put zraka sa drugih točaka, na pr. sa točke B, vidjet ćemo da moramo dobiti dvije slike jednog te istog predmeta, jedna od njih je uspravna, druga obrnuta, a obje zajedno lebde nad horizontom. Ta pojava naziva se gornji miraž i može imati oblik prikazan na slici 4c.



Sl. 5.a



Sl. 5.b

Postoji i donji miraž, koji nastaje pri temperaturnoj razdiobi prikazanoj na slici 5a. Takva temperaturna razdioba nastaje najčešće ljeti iznad užarenih pustinja. Slika se tada pojavljuje ispod objekta i pričinja nam se kao da se reflektira sa tla (sl. 5b). Ta pojava može se rastumačiti totalnom refleksijom svijetlosti i poznata je pod nazivom fata morgana. Zbog velike nestabilnosti takve temperaturne razdiobe donji miraž je prilično nejasan, jer je popraćen jakim strujanjem toplog uzduha u vis.

Še nekaj o konstrukciji kvadratnega korena kompleksnega števila

JANEZ UŠAN, Vršac

V članku »Konstrukcija kvadratnega korena kompleksnega števila« (Mat.-fiz. list št. 2 let. 1956/57) smo pokazali konstrukcije tega problema. Na tem mestu pokažimo še eno pot, ki nas pripelje do konstrukcije na sliki 3 omenjenega članka.

Uporabili bomo tako imenovano trigonometrično izražavo kompleksnega števila.

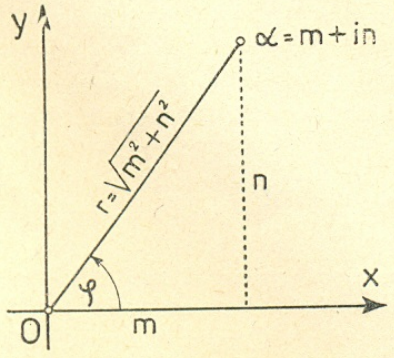
Iz slike sledi, da je $m = r \cos\varphi$ in $n = r \sin\varphi$. Če to vstavimo v $\alpha = m + in$, dobimo $\alpha = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, in se ta izražava imenuje trigonometrična izražava kompleksnega števila. Tu je $r > 0$ in $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$.

Omenjeno je že, da je $\sqrt{\alpha} = \beta$ definiran z enačbo $\beta^2 = \alpha$ ali $\beta \cdot \beta = \alpha$. To pa moremo tudi takole pisati

$$\beta = \frac{\alpha}{\beta} \tag{1}$$

Če potem pišemo $\alpha = r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)$ in $\beta = a\,(\cos\psi + i \sin\psi)$ se enačba (1) glasi

$$a\,(\cos\psi + i \sin\psi) = \frac{r\,(\cos\varphi + i \sin\varphi)}{a\,(\cos\psi + i \sin\psi)}. \tag{2}$$



Desno stran enačbe (2) moremo preurediti. Pišimo

$$\frac{r}{a} \cdot \frac{\cos\varphi + i \sin\varphi}{\cos\psi + i \sin\psi} \cdot \frac{\cos\psi - i \sin\psi}{\cos\psi - i \sin\psi}.$$

To pa je

$$\frac{r}{a} \cdot \frac{\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi}$$

oziroma

$$\frac{r}{a}\,[\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi)].$$

Sedaj (2) moremo takole pisati

$$a\cos\psi + ia\sin\psi = \frac{r}{a}\cos(\varphi - \psi) + i\frac{r}{a}\sin(\varphi - \psi).$$

Dve kompleksni števili sta pa enaki če se ujemata v obeh komponentah, torej je

$$\begin{aligned} a\cos\psi &= \frac{r}{a}\cos(\varphi - \psi) \\ a\sin\psi &= \frac{r}{a}\sin(\varphi - \psi) \end{aligned} \qquad (3)$$

Če enačbe (3) delimo, dobimo

$$ct\,\psi = ct(\varphi - \psi).$$

Od tod je potem

$$1)\ \psi = \varphi - \psi \qquad \text{oziroma} \quad \psi = \frac{\varphi}{2}$$

$$\text{ali}\ \ 2)\ \psi = \pi + (\varphi - \psi) \qquad \text{oziroma} \quad \psi = \frac{\pi + \varphi}{2}$$

Če sedaj v katerokoli enačbo (3) vstavimo $\psi = \frac{\varphi}{2}$ dobimo

$$a = \frac{r}{a}, \quad \text{oziroma} \quad a = \sqrt{r} = \sqrt{\sqrt{m^2 + n^2}}.$$

In končno moremo pisati

$$\beta = \pm\sqrt{m + in} = \pm\sqrt{r}\left(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2}\right),$$

kar je ravno potrditev konstrukcije na sliki 3 omenjenega članka!

Kaj pa je z primerom 2)? Razloži si to sam, pri tem pa pomni, da je absolutna vrednost kompleksnega števila realno pozitivno število!

*

Ob tej priliki si že nekoliko oglejmo $\sqrt[n]{\alpha}$.

K $\beta = \sqrt{\alpha}$ moremo po znanem postupku konstruirati tudi $\sqrt{\beta} = \sqrt{\sqrt{\alpha}} = \sqrt[4]{\alpha}$ i. t. d. Če splošno povemo, moremo tedaj strogo geometrično (le z žestilom in ravnilom v končno mnogo korakih!) konstruirati $\sqrt[n]{\alpha}$ za vsak n ki je obliže 2^k kjer je $k = 1, 2, 3, \ldots$ katero koli naravno število.

Iz tega očitno moremo sklepati, da se vsak problem ki nas pripelje na algebrajsko enačbo more egzaktno geometrično konstruirati vselej če dobljena enačba raspade v take enačbe ki se dajo rešiti z pomočjo korenov čigar eksponent je oblike 2^k, oziroma če je enačba sama taka.

In se pri naši temi z tem lahko tudi ustavimo.

Naloge:

1) Konstruiraj le z pomočjo ravnila in šestila v končno mnogo korakih korene tele bikvadratne enačbe $x^4 - 4x^2 + 8 = 0$. (Naj ti v pomoč še članek v Mat.-fiz. listu št. 4 let. 1955/56 stran 145).

2) Isto za enačbe

a) $x^6 + 1 = 0$

b) $x^6 + 5 = 0$. Ali tudi pri tej to gre?

Pripomba k nalogi 2): Vse korene enačbe konstruiraj v istem koordinatnem sistemu! Kaj pri tem opažaš; »algebrajska obleka« katerega geometriskega problema je to? Domnevo tudi potrdi z dokazom! Za to boš z pridom uporabil tole identiteto $x^4 - x^2 + 1 = (x^2 - x + 1)(x^2 + x + 1)$!)

ZANIMLJIVOSTI I RAZNO

Takmičenje učenika srednjih škola NR Makedonije iz matematike

U NR Makedoniji običaj, da se na kraju školske godine održava takmičenje iz matematike ili iz fizike među učenicima, uzima sve veće razmere. Ove godine već su u nekim srezovima bila organizovana ovakva takmičenja iz matematike i za učenike osmih razreda osmogodišnjih škola. Što se pak tiče takmičenja iz matematike koje je organizovalo Društvo matematičara i fizičara NRM, ono je bilo održano na dan 2. juna 1957. godine u Skopju, i u njemu je uzelo učešća ukupno 47 takmičara. Takmičenje je bilo individualno, a zadaci su bili sledeći:

Za učenike VI. razreda gimnazije:

1. Da se reši sistemot ravenki

$$x(x+1)(3x+5y) = 144$$
$$x^2 + 4x + 5y = 24$$

2. Dva broda, od koišto sekoj minuva po mirna voda 20 km na sat, povagaat od rečnite pristaništa A i B vo isto vreme eden sprema drug. Od koga prviot k'e stigne vo B a vtoriot vo A, ostanuva sekoj od niv vo tie pristaništa podednakvo dolgo vreme, a potoa trgnuvaat pak eden sprema drug.

Da se opredeli: mestoto i vremeto na sretnuvanjeto na brodovite, kako i vremeto što go pominuva sekoj od ovie brodovi vo pristaništeto, ako se znae deka e rastojanieto $AB = 30$ km brzinata na rekata 5 km/sat i deka vo tekot na 24 sati sekoj od brodovite trgnuva od isto pristanište šest pati.

3. Dadena e edna prava i dve točki od ista strana na pravata. Da se konstruira triagolnikot što ima osnova na dadenata prava, a za koi dvete dadeni točki predstavuvaat:

a) podnožja na dve negovi visini;

b) podnožja na simetralite na dva vnatrešni agli.

4. Za kakov agol treba da se navedne eden ramnostran cilindar, poln so voda, ako se saka da isteče od nego 30% od negovata sodržina?

Za učenike VII. razreda gimnazije:

1. Prviot i posledniot člen na edna tričlena aritmetička progresija se ednakvi so prviot, odnosno posledniot člen na edna geometriska tričlena progresija. Dali sumata na site členovi na aritmetičkata progresija e pogolema ili pomala od sumata na site členovi na geometriskata progresija?

2. Da se reši sistemot ravenki:

$$tg\,x + tg\,y = a, \quad tg\frac{x}{2} + tg\frac{y}{2} = 2$$

i izvrši diskusija na dobienite rezultati.

3. Nad stranite od proizvolen triagolnik ABC, kako nad osnovi, se konstruirani ramnokraki triagolnici, kaj koišto site agli pri osnovite iznesuvat po 30^0. Da se pokaže deka teminjata na ramnokrakite triagolnici, što se naogaat sprema osnovite, se vo isto vreme teminja na eden ramnostran triagolnik.

4. Nad eden presek na topka, so radius R, i edna ramnina e postavena polutopka. Koga k'e ima vaka dobienoto telo maksimalna površina?

Za učenike VIII. razreda gimnazije:

1. Da se dokaže deka e:

$$\log_2(a+b) > 1 + \frac{1}{2}(\log_2 a + \log_2 b)$$
$$(a > 0,\ b > 0)$$

2. Sistemot od dvete ravenki:

$$x^2 - y^2 = 0,\ (x-a)^2 + y^2 = 1$$

ima vo opšt slučaj četiri rešenja. Da se opredeli, računski i grafički, za koi vrednosti na parametarot a dadeniot sistem ima tri, odnosno samo dve rešenija.

3. Na prečnikot AB od daden polukrug e izbrana točkata P. Treba da se opredeli na periferijata na polukrugot edna točka C taka, da pri vrtenjeto na polukrugot ACB okolu negoviot prečnik AB dvata negovi dela, na koišto go deli otsečkata PC, opišat tela so ednakva zapremina.

4. Pravoagolen triagolnik se dviži vo ramninata taka, da teminjata na nego-

vite ostri agli se lizgat po dve vzaemno normalni pravi. Da se dokaže čisto geometriski, a i so pomok'ta na metodite na analitičkata geometrija, deka temeto na praviot agol opišuva pri tova dviženje edna otsečka.

Posle takmičenja dodeljene su jedna prva i tri treće nagrade, koje su dobili sledeći takmičari:

1. Konstantinidis Jorgo, uč. VIII. razreda gimnazije »J. B. Tito« iz Skopja. (I nagrada).
2. Mihajlovski Dragan, uč. VIII. razreda gimnazije »Cvetan Dimov« iz Skopja. (III nagrada).
3. Lagodin Vladimir, uč. VIII. razreda gimnazije »Cvetan Dimov« iz Skopja. (III nagrada).
4. Dimitrov Risto, uč. VI. razreda gimnazije »Moša Pijade« u Ohridu. (III nagrada).

Prelazni pehar Društva matematičara i fizičara NR Makedonije za najbolji kolektivni uspeh na takmičenju bio je predat ove godine prema ukupnom broju postignutih poena učenicima gimnazije »Cvetan Dimov« iz Skopja.

Dostavio: *P. Dimić*

Supernove i radioaktivnost

U posljednje vrijeme astronomija sa sve većim uspjehom koristi rezultate moderne fizike, da bi rastumačila pojedine pojave na zvijezdama, njihov život i strukturu.

Sasvim nedavno postavljena je duhovita hipoteza o izvoru zračenja supernovih. To su zvijezde ,koje odjedamput, u snažnom bljesku naročito jako eksplodiraju — poraste im temperatura i sjaj i izbace čitave ovoje svoje materije u svemir. Eksplozija je vrlo slična onoj, koja se dešava kod hidrogenske bombe. Poslije eksplozije sjaj zvijezde postepeno slabi, a količina energije, koju izlučuje, postepeno se smanjuje. Kod nekih supernovih lučena se energija u roku od 55 dana smanji na polovicu. To želi da rastumači nova hipoteza.

Zamislimo si golemi oblak plina, od kojeg se sastoji zvijezda. Za vrijeme eksplozije stvoreno je naročito stanje u tom plinu. Burni procesi, nuklearni procesi (a eksplozija im je samo vidljiv rezultat) učinili su od zvijezde izvor novih elemenata, teških elemenata — kojih inače ima malo. Osnovna sirovina za to je vodik i elektroni, čega na zvijezdama ima najviše.

Mnogi od tih elemenata su nestabilni, raspadaju se, kao i nama dobro poznati radioaktivni elementi. Hipoteza tvrdi, da je u vanjskom slojevima supernove — jer ti zrače energiju i svjetlost, koja dolazi do nas — stvoren pretežno element kalifornij (Cf) sa rednim brojem $Z = 98$. Prije 7 godina nije se znalo za kalifornij. Pronašli su ga 1950. u centru za nuklearna istraižvanja u Berkeley-u, USA (Kalifornija). Što je najvažnije, on se raspada s poluperiodom od 55 dana — za 55 dana količina mu se smanji na polovicu! Raspadajući se, on zrači energiju: ako se vanjski slojevi supernove sastoje od tog elementa, mora i lučena energija zvijezde pasti na polovicu za 55 dana!

Kako dolazi do toga, da se stvara uglavnom kalifornij, hipoteza ne pokušava rastumačiti. Ona se samo služi stanovištem, da se uopće, pri nuklearnim eksplozijama na zvijezdama, stvaraju teški elementi. *V. V.*

Poluvodiči kao termoelektrični generatori

U kaloričnim električnim centralama imamo primjer pretvaranja toplinske energije u električnu. Toplina sagorijevanja uglja troši se na stvaranje vodene pare, koja pod velikim tlakom tjera turbine, a ove opet generatore. No mnogi su sigurno vidjeli u školi pokus, gdje možemo dobiti električnu energiju direktno iz toplinske pomoću termočlanka. Ako spojimo krajeve dviju metalnih žica od različite tvari kao na pr. bakar i konstantan, pa ako jedno spojište gri-

jemo, u takvom krugu teče struja, u što se možemo uvjeriti otklonom magnetske igle. Ako su žice dovoljno debele jakost struje može biti i 100 ampera. Napetost koja se javlja na spojištima žica je to veća što je veća razlika temperatura. Na pr. ako je razlika temperatura hladnog i toplog spojišta 500° C, napetost iznosi oko 0,003V.

Znamo iz drugog glavnog zakona termodinamike, da se toplinska energija ne može nikada sasvim pretvoriti u neki drugi oblik energije. Sadi Carnot 1824. god. je proučavao parne strojeve i pokazao, da najveći mogući stepen djelovanja nekog parnog stroja može biti

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} \cdot 100\%,$$

gdje je T_1 apsolutna temperatura pare u kotlu, a T_2 temperatura okoline, ili kodenzatora. Na pr. ako je $T_1 = 473^0$ K, a $T = 373^0$ K za η izlazi oko 21%. Praktično je stvarni koeficijenat korisnog djelovanja kod parnog stroja mnogo manji zbog raznih gubitaka kao što je trenje, zračenje i t. d.

Gornji zakon je sasvim općenit i vrijedi i za termoelektrični članak. Ako je temperaturna razlika na krajevima članka 500° C, po Cartonovom zakonu izlazi, da je maksimalni stepen djelovanja oko 66%. Stvarno on je mnogo manji i kod najboljih termočlanaka iznosi svega oko 0,5% dakle, daleko manje nego što je teorijski moguće.

Ma kako bio zgodan ovakav način dobivanja električne energije, praktično se ne koristi zbog neznatnog dijela toplinske energije, koji se pretvara u električnu.

Ako se mjesto metala upotrijebi zgodna kombinacija dvije vrsti poluvodiča, stepen djelovanja može biti i 7%, što je mnogo više od metalnog termočlanka. (Poluvodiči su takve tvari čiji je specifični otpor veći nego kod metala, a manji od izolatora). Ako uzmemo u obzir, da na pr. parni strojevi stvarno pretvaraju tek oko 10% toplinske energije u mehaničku, a ovu opet u električnu, vidimo, da termoelektrični generatori predstavljaju značajan izvor električne energije. Takvi generatori ne trebaju nikakvih velikih uređaja, masivnih pokretnih dijelova, nego samo topli i hladni izvor.

Jedna takva termobaterija od 1000 elemenata sa poluvodičima, ako koristi razliku temperature od 300° C, može dati napon od 120 V. Da bi jedan radioaparat svirao, tamo gdje nema struje, dovoljno je imati jednu petrolejsku lampu na kojoj su montirani ovakovi elementi. Isto tako bilo kakve druge razlike u temperaturi možemo koristiti za dobivanje električne energije. Danas fizičari mnogo proučavaju svojstva poluvodiča i radi drugih važnih primjena.

Branko Čelustka

Katalitička nuklearna reakcija

L. W. Alvarez (USA) objavio je početkom ove godine otkriće jedne nove vrsti nuklearnih reakcija, t. zv. katalitičkih nuklearnih reakcija. Do danas je opaženo svega 15 primjera takovih reakcija. Te se reakcije donekle razlikuju od do sada poznatih, koje se, grubo uzevši, mogu podijeliti na dvije kategorije: reakcije koje nastaju bombardiranjem atomskim projektilima (u akceleratorima ili pri fisiji) i termonuklearne reakcije (fuzija). Novopronađene reakcije sliče na fuziju, ali se zbivaju pri niskoj temperaturi. Ključ reakcije je negativni μ-mezon, koji učestvuje u reakciji, ali se u njoj ne mijenja, nego samo pomaže odvijanje reakcije (katalizator!), pri kojoj se oslobađa 5 400 000 eV energije. Ovo otkriće može biti od ogromne teoretske i praktične važnosti. Međutim, vrijeme trajanja života μ-mezoma je vrlo maleno, pa bi za industrijsko korištenje ove reakcije u svrhu dobivanja energije trebalo naći druge subatomne čestice duljeg života. Suština katalize je u tome, da μ-mezon pomaže formiranje jezgre He-3 od deutrona i protona, pri čemu se višak mase oslobodi kao energija. Zanimljivo je da

su ovu pojavu, koju su eksperimentalno otkrili američki učenjaci, prije izvjesnog vremena teoretski predvidjeli — ruski učenjaci. *N. C.*

Kako bismo odredili brojeve, kojih se kvadrati svršavaju istim tim brojevima?

Znamo, da je $6^2 = 36$; dakle se kvadrat broja 6 svršava također sa 6; da nađemo dvoznamenkaste brojeve, koji imaju to svojstvo, moramo pisati, da je taj dvoznamenkasti broj oblika $10x+6$, gdje je x jedan od brojeva 1, 2, 3 . . . 9, pa mora biti $(10x + 6)^2 - (10x + 6) = (10x + 6)(10x + 6 - 1) = (10x + 6) \cdot (10x+5) = 10(5x+3)(2x+1)$ djeljivo sa 100 t. j. $(5x+3)(2x+1) = 10x^2+11x+3 = 10x^2+x+3$ mora biti djeljivo s 10. To je očito onda, kad je $x=7$. I doista se $5\,776 = 76^2$ svršava sa 76.

Da odredimo takav troznamenkasti broj, treba da pišemo, da $(100x+76)^2 - (100x+76) = (100x+76)(100x+75) = 100(25x+19)(4x+3)$ mora biti djeljivo s 1000 t. j. $(25x + 19)(4x + 3) = 100x^2+151x+57 = 100x^2+150x+50+x+7$ mora biti djeljivo s 10. To je očito onda, kad je $x = 3$, pa se doista $141376 = 376^2$ svršava sa 376.

Da odredimo takav 4 znamenkasti broj, treba da pišemo da $(1000x+376)^2 - (1000x+376) = (1000x+376)(1000x+375) = 1000(125x+47)^2(8x+3)$ mora biti djeljivo s 10 000 to jest $(125x+47) \cdot (8x+3) = 1000x^2+751x+141 = 1000x^2+750x+140+x^2+1$ mora biti djeljivo s 10. To je očito onda, kad je $x = 9$, pa se zaista $87\,909\,376 = 9\,376^2$ svršava s 9 376. I tako dalje.

Na taj način možemo sastaviti ovu tablicu:

$$
\begin{aligned}
6^2 &= 36\\
76^2 &= 5\,776\\
376^2 &= 141\,376\\
9\,376^2 &= 87\,909\,376\\
109\,376^2 &= 11\,964\,109\,376\\
7\,109\,376^2 &= 50\,543\,227\,109\,376\\
87\,109\,376^2 &= 7\,588\,043\,387\,109\,376\\
787\,109\,376^2 &= 619\,541\,169\,787\,109\,376\\
1\,787\,109\,376^2 &= 3\,193\,759\,921\,787\,109\,376\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Slično svojstvo imaju neki brojevi, koji se svršavaju s 5. Kvadrat broja 5 svršava se s 5; da nađemo dvoznamenkasti broj, koga se kvadrat svršava sa istim brojem, moramo pisati da je $(10x+5)^2 - (10x+5) = (10x+5)(10x+4) = 10(2x+1)(5x+2)$ djeljivo sa 100 t. j. $(2x+1)(5x+2) = 10x^2+9x+2 = 10x^2+10x-x+2$ djeljivo s 10. To je očito onda, kad je $x = 2$. Doista se $625 = 25^2$ svršava s 25. Slično nastavljajući dalje dolazimo do ove tablice

$$
\begin{aligned}
5^2 &= 25\\
25^2 &= 625\\
625^2 &= 390\,625\\
90\,625^2 &= 8\,212\,890\,625\\
890\,625^2 &= 793\,212\,890\,625\\
2\,890\,625^2 &= 8\,156\,312\,890\,625\\
12\,890\,625^2 &= 166\,168\,212\,890\,625\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

S. Š.

Naučnici se zabavljaju

Svi verovatno znate problem o čoveku koji je trebao da prenese vuka, kozu i korpu kupusa preko reke u čamcu tako da vuk ne pojede kozu, a koza kupus. Verovatno je taj problem u dalekoj prošlosti izmislio u svom slobodnom vremenu neki od praotaca današnje nauke, jer i danas omiljena zabava istaknutih naučnika je smišljanje i rešenje takvih i mnogo težih zabavnih problema. Pre dve godine, prilikom otvaranja Instituta za teoretsku fiziku u Edinburgu, Škotskoj, održana je konferencija nuklearnih fizičara na kojoj su se skupili skoro svi najbolji teoretski fizičari Velike Britanije. Za vreme večere u Institutu grupa teoretičara uzbuđeno je diskutovala pred tablom na kojoj je profesor Peierls, šef katedre teoretske fizike u Birminghamu napisao:

$$\frac{A \quad E\,F}{BCD}.$$

Problem je u tome da nastavite da pišete po određenom nepoznatom pravilu slova abecede iznad i ispod linije. Ovaj problem je dat na ispitu matematike u jednoj srednjoj školi u Walesu. Teoretski fizičari su zurili u tablu, dis-

kutovali, neki su digli ruke — dok prof. Nikolas Kemer, rukovodilac novog Instituta teoretske fizike, nije našao tačno rešenje, kome su se svi nasmejali: Iznad linije se pišu slova koja se sastoje samo od pravih linija, a ostala slova ispod.

Kadgod zađete među naučnike, uvek ćete u momentima kad ne rade naići po nekog koji društvu zadaje ovakve zabavne probleme. To je jedna skoro tradicionalna navika naučnika.

U istoriji nauke, ovakve »zabavne naučne trice« čestc su bile začeci velikih stvari. Iz jedne ovakve zagonetke, koju je polovicom 18-og veka izmislio za svoje prijatelje čuveni matematičar Leonard Euler, izrodila se čitava jedna važna grana matematike. Evo problema: Kroz grad Königsberg teče reka Pregel, a na reci ima ostrvo. Sedam mostova vezuju ostrvo sa obalama i kopnom. Problem koji je smislio Euler bio je: kako preći preko svih sedam mostova, a da ne pređete dvaputa ni preko jednog. Naučnici, obični građani u Königsbergu provodili su večeri pokušavajući da nađu rešenje. Euler je konačno dokazao da problem nema rešenja. Iz te na prvi pogled »bezvredne zagonetke« nikla je topologija ili analysis situs, grana matematike kojom se danas bavi veoma veliki broj matematičara i koja se već primenjuje u atomskoj i nuklearnoj fizici.

Ali topologija nije jedina grana matematike koja je nikla iz ovakve »trice«. Godine 1654. čuvenom mladom matematičaru i filozofu Blaise Pascalu prijavio se u posetu profesionalni kockar Antoine Gombaud s molbom da mu matematičar pomogne u svađi koju je imao sa svojim kockarskim društvom. Šta pametno i korisno može matematičar, filozof i vrlo religiozan čovek, da nauči od kockara? Ali Pascala je zanimalo da vidi kakvu je to presudu u kocki mogao da donese matematičar. Evo u čemu je bio problem: U jednoj igri kartama oba igrača su uložila istu količinu novca. Pobednik nosi sve. A pobeđuje onaj ko prvi dobije određeni broj poena. Međutim igra se morala prekinuti pre svršetka. Kako će se suma novca raspodeliti između igrača na osnovu poena koji svaki ima u trenutku kad je igra prekinuta? Pascala je problem vrlo zainteresovao. On je u vezi s njim otpočeo prepisku sa Fermatom, advokatom koji je svojim uzgrednim radom na matematici postao jedan od najslavnijih matematičara u istoriji. Iz te prepiske, koja je očuvana, započete kockarskim problemom izrodila se teorija verovatnoće, koja danas ima ogromnu primenu u nizu grana nauke, fundamentalne i primenjene.

Tu tradiciju i opšte ljudski interes za zagonetke održavaju ne samo deca i gimnazijalci već i najpoznatiji naučnici.

Pre nekoliko godina u Danskoj jedan je majstor izmislio čednu igračku koja je pobudila interes naučnih krugova. Kuglica od plastične mase veličine ping pong loptice imala je pravu dršku cilindričnog oblika tri santimetra visoku a oko 6 mm debelu. Kad zavrtite ovu igračku na stolu ili podu ona će se okre-

1.

tati na kugli, ali pre nego što prestane okrenuće se tako da se nastavi da se vrti na vrhu držalje sve dok ne padne. Preko dece ova igračka je dospela do naučnika. I tada ste vrlo često mogli videti naučnike svetskog glasa kako vrte

dečiju igračku i diskutuju kako je to moguće. Na priloženoj slici, koja je snimljena bez znanja ličnosti na njoj, vidite prof. Nielsa Bohra, jednog od osnivača teoretske atomske i nuklearne fizike, i prof. Paulija, jednog od najpoznatijih teoretičara našeg doba kako se »igraju« posmatrajući vrteljku.

Prof. Synge, rukovodilac Instituta za više studije u Dublinu, Irskoj, toliko se zainteresovao za ovu igračku da je u Aktima irske akademije napisao tri naučna rada da rastumači kako se ova čudna zvrčka vrti.

U časopisima koji se ozbiljno bave popularizacijom nauke i u kojima sarađuju vrlo poznata naučna imena, skoro uvek ćete naići na ovakve zagonetke. Tako je čuveni časopis »Scientific American« nedavno otvorio rubriku problema i zagonetki. Pošto se nalazimo u geofizičkoj godini, to ćemo iz niza zagonetki objavljenih u tom časopisu izneti ovaj jedan povezan sa geofizikom:

Dva lovca pođu u lov. Kad su došli na lovište naprave logor. Onda krenu deset kilometara pravo na jug. Pošto nisu našli ništa, okrenu deset kilometara pravo na istok i naiđu na medveda. Ubiju ga, i posle deset kilometara hoda pravo na sever donesu medveda tačno u logor. Problem: kakve je boje bio medved?

Znajući za veliki interes naučnih istraživača u svim granama nauke za ovakve probleme i zagonetke, švedska firma »LKB«, koja proizvodi aparate za hemijska i fizička istraživanja, dva puta svake godine objavljuje po jedan problem i šalje ga na rešenje u hiljadama primeraka naučnicima u svim zemljama na svetu. Interes koji su ovi problemi pobudili vidi se iz hiljada odgovora koje ova firma prima. Navešćemo jedan problem koji je ova firma poslala naučnicima:

»Naš prijatelj, Sven Svenson, kapetan interplanetarnog broda, kaže urednik časopisa LKB, posetio nas je pre neki dan da nas upozna sa nekim teškoćama koje je imao u svom redovnom nedavnom putovanju na Mars.

»Na Marsu je sreo glavnog inspektora kanala, generala Nepa. Sprijateljili su se i Nepo ga je pozvao na večeru. Tu je Svenson sreo gđu Nepo (jednu vrlo lepu damu) i tri Nepova sina: Lu, Ku i Bu. Sven je svojim prijateljima pokazao sliku svoje male plavokose kćeri Stine i rekao koliko je stara.

Uskoro je stigao ministar saobraćaja na Marsu Dr. Baluk da se upozna sa kapetanom Svensonom. Kad je Dr. Baluk upitao Nepa koliko su stara njegova deca ovaj je odgovorio:

»Otkrio sam neke vrlo čudne činjenice o starosti naše dece. Proizvod godina starosti Lu, Ku i Bu iznosi 3520 godina. Suma njihovih godina je jednaka 14 puta godine starosti Svensonove kćeri Stine. Razume se ne pravim razliku između dužine godine na Zemlji i Marsu.

»Dobro, odgovorio je ministar, ali to ne odgovara na moje pitanje«.

Nepo je rekao: »Izvinite, molim vas. Želim da dodam da je vaš sin Labok, čije godine slučajno znam, stariji od sve četvoro spomenute dece«.

»Sad znam odgovor«, rekao je ministar.

»Pa koliko je star vaš sin? upitao je Sven.

Marsijanci su ga začuđeno pogledali: »Dragi prijatelju. Pa malo dete to može odmah da izračuna«.

»Razume se«, odgovorio je Sven zamuckujući — ništa ne shvatajući osim toga da je Nepo mislio da *Marsovsko* dete to može odmah da reši«.

»Sven je zabrinut. On strahuje da se vrati na Mars i sretne se sa Nepom i Balokom, a da ne zna starost Laboka. Možete li mu vi pomoći«, pita LKB firma stotine naučnika kojima je poslala ovaj problem.

Problem nije jednostavan, uz njega bio je poslat i ovde priloženi crtež. Redakcija nije rekla, ali se pokazalo da oni koji pažljivo pogledaju crtež lakše će naći odgovor.

Sl. 2.

I blizu 200 naučnika je našlo odgovor. U časopisu firme gde su objavljena rešenja naći ćete imena niza veoma poznatih naučnika. Tu ćete sresti imena poznatih hemičara, astrofizičara, stručnjaka za teoriju relativnosti, konstrukciju nuklearnih reaktora, teoretičara nuklearne fizike itd. U rešenju poslednjeg problema, u kome se radi kako će domaćin rasporediti sedam bračnih parova oko stola na večeri, učestvovali su pored ostalih glavni nuklearni fizičar Australije prof. J. Oliphant, čuveni eksperimentalni fizičari L. Alvarez i Ed. McMillan iz Kalifornije, direktor Evropskog nuklearnog centra prof. Bakker, naš organski hemičar prof. K. Balenović i niz drugih.

Iz ovih problema neće se izroditi neka nova grana nauke — ali to ovome nije ni cilj, već je cilj da pruži zabave naučnicima.

S. D.

P. S.: Medved je beo! Rešenje »marsovskog« problema objavićemo u idućem broju.

S tri dvojke

Poznati sovjetski popularizator matematike Pereljman iznosi u svojoj »Zanimljivoj algebri« ovaj zadatak (s kojim su se zabavljali učesnici jednog kongresa fizičara u Odesi): *S pomoću 3 dvojke i matematičkih simbola treba prikazati ma koji prirodni broj.*

Evo rješenja za broj 3:

$$3 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}.$$

Provjerimo!

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt[8]{2} = 2^{\frac{1}{8}} = 2^{(2-3)}$$

$$\log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 2^{-3}$$

$$\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = -3, \text{ dakle}$$

$$-\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = 3.$$

Broj 5 bismo prikazali ovako:

$$5 = -\log_2 \log_2 \sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}}},$$

a općenito rješenje bi glasilo:

$$n = -\log_2 \log_2 \underbrace{\sqrt{\sqrt{\ldots\sqrt{\sqrt{2}}}}}_{n \text{ puta}}.$$

M. K.

NOVE KNJIGE

Ignacije Smolec

Matematika i stvarnost

— Naklada »Školska knjiga«, Zagreb 1957., 192 str., cijena 250 dinara.

Kao prvi svezak Biblioteke za matematiku, fiziku i kemiju »Materija i broj« izašla je nedavno ova knjiga, koja je daljnji prilog našoj dopunskoj matematičkoj literaturi za učenike. Namijenjena je svima onima koji, s predznanjem osmogodišnje škole, žele bilo kolektivno, bilo individualno produbiti i proširiti svoje znanje iz matematike. Već i sama podjela knjige na 83 kraća štiva, od kojih se znatan dio može čitati i odvojeno, čini ju pogodnom za rad u seminarima, naučnim grupama i sl.

Cilj je ove knjige, kako kaže autor, »da osvijetli matematiku izvana — iz stvarnosti, koja ju je rodila i odgojila — i da prikaže vlastite, unutrašnje putove njezina razvitka«. Pri tome se autor ograničio »samo na osnovne stvari, na kojima počiva matematička nauka, a to su: broj, točka i vektor«. Nakon uvodnog dijela, u kojem obrađuje važan pojam apstrahiranja, vodi nas on, počevši

od prvih početaka brojenja — postepeno proširujući brojno područje — sve do skupa realnih brojeva, od abakusa do modernih elektronskih računskih strojeva. Pri tome neumorno naglašava veze, kako matematike s raznim granama čovjekove djelatnosti, tako i raznih dijelova matematike među sobom. Posebno valja u idejnom pogledu istaći VIII. poglavlje (o dijalektičkoj povezanosti aritmetičkih operacija), a u praktičnom pogledu X. i XI. poglavlje, posvećeno numeričkom računanju.

Knjiga je pisana pristupačnim stilom, iako su teorijska obrazloženja dana strože, nego što se to dospije u redovnoj nastavi. Iza nekih članaka ima zgodnih primjera za vježbu. Brojni sugestivni crteži i table osvježuju tekst. Na kraju je dodan iscrpni i temeljiti Tumač pojmova i stručnih termina. Ukusna oprema još podiže vrijednost ove korisne knjige, koja se toplo preporuča našim čitaocima. *M. K.*

Fizička mjerenja

Mladen Paić

III. dio. — Naklada: »Školska knjiga«, Zagreb 1957. (258 stranica, cijena 660 dinara).

Iako je ova knjiga (kao i njezin I. i II. dio, koji su izašli 1948. god., odnosno 1951. god.) namijenjena studentima, koji studiraju fiziku na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu Sveučilišta u Zagrebu, ona će vrlo dobro poslužiti i kao priručnik za vježbe i seminare iz fizike u gimnazijama i ostalim srednjim školama.

Ovaj III. dio Fizičkih mjerenja sadrži mjerenja visokih temperatura i električna mjerenja, naročito u vezi s elektronskim cijevima, fotoelektričnim efektom, električnim titrajima, primjenama jake struje i katodnog oscilografa. Dana je stroga teorija, pisana jasno, svih onih fizičkih pojava, koje dolaze kod mjerenja pojedinih fizičkih veličina, kao i detaljan opis samog mjerenja. Knjiga je bogata slikama sa shemama uređaja. Od osobitog će interesa biti za vježbe i seminare u srednjim školama mjerenje u vezi s diodom, triodom, pojačalom, električnim titrajnim krugom, elektromagnetskim valovima, kao i mjerenje u vezi s najjednostavnijim radiofonskim prijemnicima. *Bra-Ma*

ZADACI I RJEŠENJA

A) Zadaci iz matematike*

266.* Скратити разломак

$$\frac{x^3 + x^2 - 9x - 9}{(x-2)^2 - (x-4)^2}$$

и показати да се сведени разломак не може скратити кад је x паран број а да се за непарне вредности x своди на цео број.

Да ли се у овом другом случају добије паран или непаран број?

267.* Решити систем једначина

$$m^2(x-y) + m(2x+3y) = 3$$
$$m^2(x-y) - m(2x+3y) = -2$$

затим одредити m из услова $x + y > \frac{1}{2m}$.

268. Дата је квадратна једначина

(1) $$(x+2)(4-x) - m = 0,$$

где је m реалан параметар.

а) Испитати природу и знак корена једначине (1) за разне вредности m.

б) Добијене резултате проверити на графику функције

$$y = (x+2)(4-x)$$

в) Одредити m из услова да корени једначине (1) задовољавају једнакост

$$x_2 = -\frac{3}{2}x_1$$

269. Polare vrhova trokuta ABC s obzirom na kružnicu $x^2 + y^2 = r^2$ jesu redom strane B_1C_1, C_1A_1, A_1B_1 trokuta $A_1B_1C_1$. Dokaži analitički, da pravci AA_1, BB_1 i CC_1 prolaze jednom točkom.

270. Pravci: $3x - 4y + 6 = 0$, $8x + 15y + 30 = 0$ i $12x - 5y - 25 = 0$ zatvaraju trokut. Nađite jednadžbu kružnice upisane tome trokutu i koordinate točke, u kojoj prvi pravac dotiče tu kružnicu!

* Zadatke označene sa ** neka ne šalju učenici razreda višeg od petog, a zadatke označene s * učenici razreda višeg od šestog.

Rješenja poslati najkasnije do 1. XI. 1957.

271.** Na dnu kockaste kutije brida a smještene su 4 kugle promjera $\frac{a}{2}$. Koliki je promjer pete kugle, koja dodiruje prve četiri kugle i poklopac?

272. U krug su upisani: *a)* trapez, kojem je jedna baza dijametar i *b)* istokračan trokut, kojem su stranice paralelne stranicama trapeza. Dokazati jednakost trapeza i trokuta!

273.* Izračunaj:

$$\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}+\frac{2x(x-1)^2}{x^4+x^2+1}+\frac{2x^2(x^2-1)^2}{x^8+x^4+1}.$$

Uputa: da x^4+x^2+1 rastaviš u faktore dodaj i oduzmi x^2; slično x^8+x^4+1 i t. d.

274. Riješi jednadžbe:

a) $9x^3+30x^2+36x+16=0$,

b) $x^3-3x^2-6x+8=0$;

vidi str. 35.

275. Riješi sistem:

$$\begin{aligned} x+y+z &= 9,\\ x^2+y^2+z^2 &= 29,\\ x^3+y^3+z^3 &= 99. \end{aligned}$$

Uputa: ako se eliminira x i y, dolazi se do jednadžbe 3. stepena u z, koja se može riješiti metodom na str. 35.

276. Riješi sistem:

$$\begin{aligned} \cos x+\cos y &= a,\\ \cos^2 x+\cos^2 y &= b. \end{aligned}$$

Diskusija!

277. Odredi četveroznamenkasti broj potpuni kvadrat tako, da je broj, što ga čine prve dvije znamenke potpuni kvadrat, a također i broj, što ga čine posljednje 2 znamenke, potpuni kvadrat.

278*. Dokazati da iz jednakosti

$$(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2=(x+y-2z)^2+(y+z-2x)^2+(x+z-2y)^2$$

sleduje veza $x=y=z$.

279. Dokazati da je

$$\frac{1-4\sin 10^\circ}{\operatorname{tg} 20^\circ}=\operatorname{tg} 40^\circ.$$

B) Zadaci iz fizike

141. U cijev koja ima oblik slova U nalijemo tekućinu gustoće $g_1=1{,}24\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$. U jedan krak cijevi nadolijemo drugu tekućinu, koja se ne miješa sa prvom, a gustoća joj je $g_2=0{,}7\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$. Stupac te tekućine je visok $h=12$ cm. Kako visok stupac tekućine, koja ima gustoću $g_3=1\ \mathrm{g\,cm^{-3}}$, a ne miješa se s prvom tekućinom, treba nadoliti u drugi krak cijevi, da nivoi tekućina u prvom i u drugom kraku budu jednako visoki?

142. Tijelo se skliže duž jedne kosine duge 21 m, a nagnute prema horizontalnoj ravnini pod kutom $\alpha=30^0$. Na kraju kosine tijelo ima brzinu $4{,}10\ \mathrm{m\,s^{-1}}$. Koliko se tu topline proizvelo trenjem? (1 cal = 4,17 J, $g=9{,}81\ \mathrm{m\,s^{-2}}$).

143. U jednom kalorimetru nalazi se određena količina vode, dok je u drugom neka tekućina jednake mase kao i voda. U oba kalorimetra uronjene su dvije žice od konstantana i serijski spojene u krugu struje. Otpor prve žice $R_1=18\,\Omega$, a druge $R_2=30\,\Omega$. Zatvorimo krug struje i poslije nekog vremena digne se temperatura vode za $4{,}5^0$ C, a tekućine za 15^0 C. Kolika je specifična toplina tekućine?

144. Krug struje sastoji se od dvije baterije spojene u seriju i žice, koja ima otpor $10\,\Omega$. Svaka baterija ima elektromotornu silu 1,4 V, a unutarnji otpor svake baterije je $2{,}5\,\Omega$. Dodamo li u krug struje još treću bateriju i spojimo li je u seriju s prve dvije, jakost struje u krugu struje se ne promijeni. Ako tu treću bateriju okrenemo i spojimo je obrnuto, nego u prvom slučaju, jakost struje u krugu struje padne na polovicu. Izračunaj elektromotornu silu treće baterije i njezin unutarnji otpor.

145. Dvije jednake optičke prizme treba namjestiti tako, da zraka svjetlosti koja upada okomito na prvu prizmu, nakon prolaza kroz prvu i drugu prizmu izlazi iz druge prizme također okomito. Kut svake prizme je α a indeks loma im je n. a) Nacrtaj put zrake; b) odredi kut devijacije; c) odredi kut što ga zatvaraju stranice prizama.

C) Rješenja iz matematike

253. *Zadan je kvadrat ABCD stranice a, čije su dijagonale AC i BD. Na stranicama AB i CD neka se nanesu jednake dužine*

$$AA_1=CC_1=x,\ (x<a),$$

a na BC i DA dužine

$$BB_1 = DD_1 = y, \ (y < a)$$

a) *Pokazati, da je* $A_1B_1C_1D_1$ *paralelogram i odrediti presjek njegovih dijagonala.*

b) *Pretpostavljajući, da je x zadano, izračunati y iz uslova, da je* $A_1B_1C_1D_1$ *pravokutnik. Problem ima dva rješenja; jednom rješenju odgovara kvadrat, a drugom pravokutnik.*

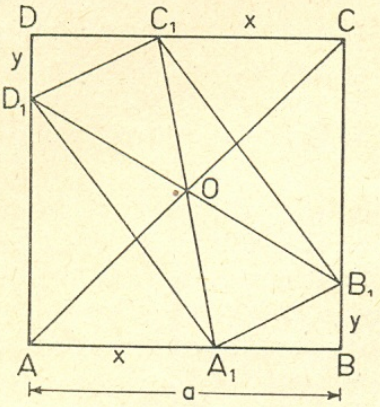
c) *Izračunati površinu P tog kvadrata i* P_1 *pravokutnika, u funkciji od a i x. Pokazati, da je* $P + P_1 = a^2$.

Rješenje: *a*) Dokazat ćemo, da je

$$A_1B_1 = C_1D_1 \text{ i } B_1C_1 = D_1A_1.$$

$$\overline{A_1B_1}^2 = \overline{A_1B}^2 + \overline{BB_1}^2 = (a-x)^2 + y^2,$$

$$\overline{C_1D_1}^2 = \overline{C_1D}^2 + \overline{DD_1}^2 = (a-x)^2 + y^2. \quad (1)$$



Kako su desne strane izraza jednake, jednake su i lijeve, t. j. $A_1B_1 = C_1D_1$. Slično je i $B_1C_1 = D_1A_1$, jer je

$$\overline{B_1C_1}^2 = \overline{B_1C}^2 + \overline{CC_1}^2 = (a-y)^2 + x^2,$$

$$D_1A_1^2 = D_1A^2 + AA_1^2 = (a-y)^2 + x^2. \quad (2)$$

Prema tome su u četverokutu $A_1B_1C_1D_1$ suprotne stranice jednake; on je dakle paralelogram. Promotrimo sada trokute $\triangle OCC_1$ i $\triangle OAA_1$. Oni su sukladni (I, $AA_1 = CC_1 = x$, $\sphericalangle OCC_1 = \sphericalangle OAA_1$ $\sphericalangle OC_1C = \sphericalangle OA_1A$ [izmjenični uz paralele]), pa je $C_1O = OA_1$ i $CO = OA$. Dijagonale se CA (kvadrata $ABCD$) i C_1A_1 (paralelograma $A_1B_1C_1D_1$) dakle raspolavljaju. No polovištem dijagonale C_1A_1 prolazi i dijagonala D_1B_1 (jer je $A_1B_1C_1D_1$ paralelogram). Isto se tako raspolavljaju i dijagonale kvadrata $ABCD$, pa točkom O prolaze sve četiri dijagonale. Prema tome je sjecište dijagonala paralelograma $A_1B_1C_1D_1$ središte upisane i opisane kružnice kvadrata $ABCD$ (jer je ujedno sjecište njegovih dijagonala).

b) Ako je paralelogram $A_1B_1C_1D_1$ pravokutnik, bit će trokuti $\triangle D_1AA_1$ i $\triangle A_1BB_1$ slični ($\sphericalangle D_1A_1B_1 = 90°$, pa je $\sphericalangle AA_1D_1 + \sphericalangle D_1A_1B_1 + \sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle AA_1D_1 + 90° + \sphericalangle B_1A_1B = 180°$ ili $\sphericalangle AA_1D_1 + \sphericalangle B_1A_1B = 90°$, a jer su ovi trokuti pravokutni, to je i $\sphericalangle AA_1D_1 + \sphericalangle A_1D_1A = 90°$, dakle $\sphericalangle B_1A_1B = \sphericalangle A_1D_1A$. Prema tome su sva tri kuta u u trokutima D_1AA_1 i A_1BB_1 jednaka, pa su trokuti slični, dakle će biti:

$$B_1B : A_1B = A_1A : D_1A, \quad \text{t. j.}$$

$$y : (a-x) = x : (a-y), \ y(a-y) = x \cdot (a-x),$$

$$y^2 - ay + x(a-x) = 0,$$

a odavde je

$$y_{1,2} = \frac{a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - x(a-x)} =$$

$$= \frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4ax + 4x^2}}{2} = \frac{a}{2} \pm \frac{a-2x}{2};$$

$y_1 = a - x$, $y_2 = x$. Za $y_1 = a - x$ imamo po (1) i (2):

$$(A_1B_1)_1 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = \sqrt{(a-x)^2 + (a-x)^2} =$$

$$= (a-x)\sqrt{2} \quad \text{i}$$

$$(B_1C_1)_1 = \sqrt{(a-y)^2 + x^2} = \sqrt{[a-(a-x)]^2 + x^2} =$$

$$= \sqrt{2x^2} = x\sqrt{2}.$$

Stranice su različite, a lik je pravokutnik. Za $y_2 = x$ imamo iz (1) i (2)

$$(A_1B_1)_2 = \sqrt{(a-x)^2 + y^2} = \sqrt{(a-x)^2 + x^2}$$

$$(B_1C_1)_2 = \sqrt{(a-y)^2 + x^2} + \sqrt{(a-x)^2 + x^2}.$$

Stranice su jednake, pa se radi o kvadratu.

c) Površina je kvadrata

$$P = (A_1B_1)_2 \cdot (B_1C_1)_2 =$$

$$= \sqrt{(a-x)^2 + x^2}\sqrt{(a-x)^2 + x^2} = a^2 - 2ax + 2x^2.$$

Površina je pravokutnika

$$P_1 = (A_1B_1)_1 (B_1C_1)_1 = x\sqrt{2}(a-x)\sqrt{2} =$$

$$= 2x(a-x) = 2ax - 2x^2,$$

a $P + P_1 = (a^2 - 2ax + 2x^2) + (2ax - 2x^2) = a^2$.

Vladimir Čepulić, uč. 8c r. kl. g. Zagreb

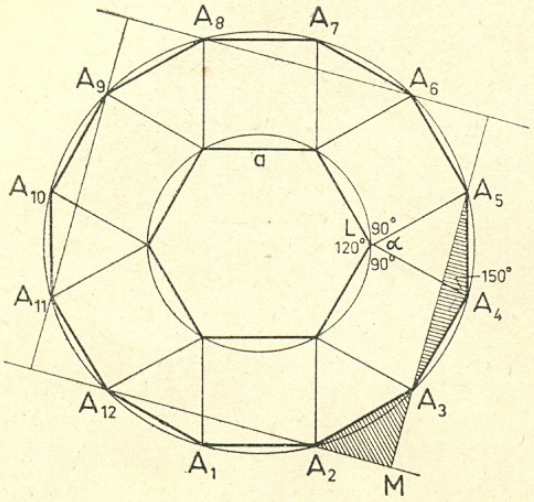
254. *Дат је правилан шестоугао површине a.*

a) *Над сваком страном тог шестоугла конструисан је квадрат. Показати да дванаест спољашњих темена тих квадрата претстављају темена једног правилног дванаестоугла.*

b) *Темена тог дванаестоугла означена су редом са* $A_1, A_2 \ldots A_{12}$, *датим су правама спојена темена* A_3 *и* A_5, A_6 *и* A_8, A_9 *и* A_{11}, A_{12} *и* A_2. *Те праве довољно продужене, образују квадрат. Показати да је површина тог квадрата једнака површини датог дванаестоугла.*

Р е ш е њ е:

a) Треба доказати да је $\triangle LA_4A_5$ равностран јер је онда $A_5A_4 = A_6A_7$ итд.



Збир углова $90° + 90° + 120° + \alpha = 360°$; $\alpha = 60°$, $LA_5 = LA_4$ и $\alpha = 60°$ значи да је LA_4A_5 равностран па је самим тим и $A_1A_2 \ldots A_{12}$ правилан дванаестоугао.

b) Треба доказати да је површина троугла $A_3A_4A_5\,(P_x) = P_n$ (површини троугла A_2MA_3). $P_n = \left(\frac{a}{2}\right)^2$ јер је A_2MA_3 равнокрако правоугли троугао

$$P_x = \frac{a^2}{2}\,sin\,150°,\quad P_x = \frac{a^2}{2}\cdot\frac{1}{2},\quad P = \frac{a^2}{4} = \left(\frac{a}{2}\right)^2.$$

Дакле, $P_n = P_x$ па је према томе и површина квадрата једнака површини датог шестоугаоника.

Или такође: површина је дванаестоугла

$$\frac{12a^2}{4}\,ctg\,\frac{180°}{12} = 3a^2\,ctg\,15° = 3a^2\,(2+\sqrt{3}),$$

квадрат има страну

$$a\sqrt{2} + 2a\,sin\,75° = \frac{a}{2}\,(3\sqrt{2}+\sqrt{6})$$

и површину

$$\left[\frac{a}{2}\,(3\sqrt{2}+\sqrt{6})\right]^2 = 3a^2\,(2+\sqrt{3}).$$

Перме Томислав
уч. 7_6 р. в. м. г. »Ст. Сремац« Ниш

255. *Одредити све системе реалних вриједности од x и y, за које је израз* $(x+iy)^3$ *реалан и већи од 27.*

$(x+iy)^3 = x^3 + 3x^2iy - 3xy^2 - iy^3 = x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)\,i$. Да овај израз буде реалан мора његов имагинарни дио бити једнак 0, дакле $3x^2y - y^3 = y\,(3x^2 - y^2) = 0$. Рјешења су ове једнадžбе $y_1 = 0$, $y_2 = +x\sqrt{3}$, $y_3 = -x\sqrt{3}$. Да израз (1) буде и већи од 27 мора бити $x^3 - 3xy^2 > 27$ (т. ј. реални дио мора бити већи од 27). Ту имамо 3 неједнадžбе, које одговарају увјетима задатка: $x^3 - 3xy_1^2 = x^3 > 27$, $x^3 - 3xy_2^2 = x^3 - 9x^3 = -8x^3 > 27$ и $x^3 - 3xy_3^2 = -8x^3 > 27$, од којих су посљедње двије једнаке.

Из прве имамо $x > 3$ из друге и треће $x^3 < -\frac{27}{8}$ т. ј. $x < -\frac{3}{2}$. Задатку дакле одговарају слиједећи системи: $x > 3$, $y = 0$; $x < -\frac{3}{2}$, $y = +x\sqrt{3}$; $x < -\frac{3}{2}$, $y = -x\sqrt{3}$.

Или с другим ријечима: задатку одговарају све точке на оси x, којих је апсциса већа од 3, а такође и све точке на оба правца

$$y = x\sqrt{3},\quad y = -x\sqrt{3},$$

којих је апсциса манја од $-\frac{3}{2}$.

Vladimir Ćepulić, 8.c r. kl. g. Zagreb

256. *Stranice trokuta čine aritmetički niz sa zadanom diferencijom d; kolike su te stranice, ako je omjer površine trokuta i površine pravokutnika, što ga određuju obje manje stranice trokuta, jednak m. Diskusija.*

Neka su stranice trokuta: $x - d$, x, $x + d$, a polovina opsega $s = \frac{3}{2}x$. Stoga je površina trokuta

$$P_1 = \sqrt{\frac{3}{2}x\left(\frac{3}{2}x - x + d\right)\left(\frac{3}{2}x - x\right)\left(\frac{3}{2}x - x - d\right)} = x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right)}.$$

Ако претпоставимо, да је $d > 0$, површина је правокутника је $P_2 = x\,(x - d)$.

$$P_1 : P_2 = m,\quad P_1 = mP_2,$$

$$x\sqrt{\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right)} = mx\,(x - d),$$

$$\frac{3}{4}\left(\frac{x^2}{4} - d^2\right) = m^2\,(x-d)^2$$

или коначно

$$\left(\frac{3}{16} - m^2\right)x^2 + 2dm^2x - d^2\left(\frac{3}{4} + m^2\right) = 0 \quad (1)$$

Како овдје мора бити испуњен увјет егзистенције трокута $x + d < x + x - d$ или $x > 2d$, потребно је испитати, колико једнадžба (1) има корijена већих од $2d$.

Zadatak ima jedno rješenje, ako je ispunjen uvjet $af(2d) < 0$, t. j.

$$\left(\frac{3}{16} - m^2\right)\left[4d^2\left(\frac{3}{16} - m^2\right) + 4d^2m^2 - \right.$$
$$\left. - d^2\left(\frac{3}{4} + m^2\right)\right] < 0 \qquad \text{ili}$$

$-\frac{\sqrt{3}}{4} < m < \frac{\sqrt{3}}{4}$, odnosno $0 < m < \frac{\sqrt{3}}{4}$.

Zadatak ima 2 rješenja, ako su ispunjeni uvjeti: 1.) $D \geqslant 0$, t. j.

$$(2dm^2)^2 + 4d^2\left(\frac{3}{4} + m^2\right)\left(\frac{3}{16} - m^2\right) \geqslant 0$$

ili $$-\frac{1}{2} \leqslant m \leqslant \frac{1}{2},$$

2.) $af(2d) > 0$, a to je za $m > \frac{\sqrt{3}}{4}$,

3.) $af'(2d) < 0$, t. j.

$$\left(\frac{3}{16} - m^2\right)\left[4d\left(\frac{3}{16} - m^2\right) + 2dm^2\right] < 0$$

ili $$\frac{\sqrt{3}}{4} < m < \frac{\sqrt{6}}{4}.$$

Svi su ti uvjeti ispunjeni za $\frac{\sqrt{3}}{4} < m \leqslant \frac{1}{2}$.

Basar Ivan, uč. 8. b r. g. Karlovac

257. *Skrati:*

$$\frac{(m^2 + 3mn - 4n^2)^4 - (m^2 - 3mn - 4n^2)^4}{(m^2 + 2n^2)^4 - (m^2 - 4n^2)^4 - (6n^2)^4}.$$

Uputstvo: u imenitelju razmatraj najprije prvi i treći član.

Zadani razlomak označimo s A; brojitelj od A možemo pisati:

$$[(m^2 + 3mn - 4n^2)^2 + (m^2 - 3mn - 4n^2)^2]\,[(m^2 + 3mn - 4n^2)^2 - (m^2 - 3mn - 4n^2)^2].$$

Ako u prvoj uglastoj zagradi izvedemo naznačene operacije, a drugu shvatimo kao produkt od zbira i razlike, dobivamo

$$(2m^4 + 2m^2n^2 + 32n^4)(m^2 - 4n^2) \cdot 12mn = 24mn(m^4 + m^2n^2 + 16n^4)(m^2 - 4n^2).$$

Imenitelj prema uputstvu možemo pisati:

$$(m^4 + 4m^2n^2 + 40n^4)(m^2 + 8n^2)(m^2 - 4n^2) - (m^2 - 4n^2)^4 = (m^2 - 4n^2)[(m^4 + 4m^2n^2 + 40n^4)(m^2 + 8n^2) - (m^2 - 4n^2)^3].$$

Kako je izraz u uglastoj zagradi jednak

$$24m^4n^2 + 24m^2n^4 + 384n^6 = 24n^2(m^4 + m^2n^2 + 16n^4),$$

to je imenitelj

$$24n^2(m^4 + m^2n^2 + 16n^4)(m^2 - 4n^2) \quad \text{i}$$

$$A = \frac{24mn}{24m^2} = \frac{m}{n}.$$

Mesihović Behđed, uč. 5_4 r. g. Mostar

258. *Odredi takav 4-cifreni broj potpuni kvadrat da su mu prve 2 i posljednje 2 znamenke jednake.*

Traženi četveroznamenkasti broj glasi

$$1000x + 100x + 10y + y = 1100x + 11y = 11(100x + y)$$

gdje su x i y znamenke traženog broja. Jer je on potpuni kvadrat i sadrži 11 kao faktor, mora da je oblika $(11n)^2$ tj.

$11(100x + y) = (11n)^2$ ili $100x + y = 11n^2$.

Kako je $100x + y$ djeljivo s 11, očito je $x + y = 11$ ili $y = 11 - x$ pa imamo

$$99x + 11 = 11n^2 \text{ ili } 9x + 1 = n^2.$$

Sada u posljednjem izrazu treba da zamenimo vrijednosti za x vrijednostima od 1 do 9 dok ne dobijamo potpuni kvadrat. To je za $x = 7$, onda je $n^2 = 64$, $n = 8$ i $y = 4$; traženi je broj 7744, on je kvadrat od 88.

Vračarić Mirjana, uč. 6_4 r. g. Sombor

259. *Zadana je jednadžba*

$$(m - 2)x^2 + 3x + (m + 2) = 0$$

a) Kako se mijenjaju korijeni te jednadžbe kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$?

b) Za koje se vrijednosti od m α) samo jedan, β) oba korijena nalaze između -3 i $+3$?

a) Da bismo ispitali, kako se mijenjaju korijeni zadane jednadžbe, kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$, treba najprije odrediti vrijednost od m, za koju je $D \geqslant 0$, zatim S i P i naći vrijednosti od m, za koje ti izrazi mijenjaju znak.

$$D = 9 - 4(m - 2)(m + 2) \geqslant 0$$

za $$-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant \frac{5}{2}.$$

$$S = -\frac{3}{m - 2}, \quad P = \frac{m + 2}{m - 2}.$$

Prvi razlomak mijenja znak $m = 2$; drugi za $m = \pm 2$. Sve nađene vrijednosti od m, t. zv. karakteristične vrijednosti, su:

$$-\frac{5}{2}, -2, 2, \frac{5}{2}.$$

Prema njima razlikujemo ove slučajeve:

1) $-\infty < m < -\frac{5}{2}$ korijeni nisu realni.

2) $m = -\frac{5}{2}$, $D = 0$, $x_1 = x_2 = \frac{5}{2} = \frac{1}{3}$,

3) $\frac{5}{2} < m < -2$, $D > 0$, $S > 0$, $P > 0$, $0 < x_1 < x_2$,

4) $m = -2$, $P = 0$ $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{4}$,

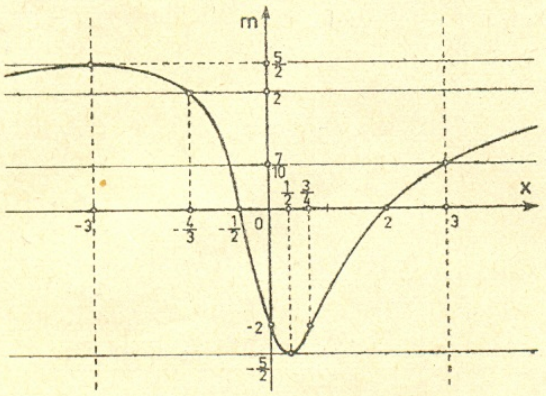
5) $-2 < m < 2$, $D > 0$, $S > 0$, $P < 0$, $x_1 < 0 < x_2$, $x_2 > |x_1|$,

6) $m = 2$, jedan je korijen beskonačno velik. (jer je koeficijent od x^2 jednak nuli), drugi izlazi iz jednadžbe za $m = 2$, $3x + 4 = 0$, $x = -\frac{4}{3}$.

7) $2 < m < \frac{5}{2}$, $D > 0$, $S < 0$, $P > 0$, $x_1 < x_2 < 0$,

8) $m = \frac{5}{2}$ $D = 0$, $x_1 = x_2 = \frac{S}{2} = -3$,

9) $\frac{5}{2} < m < +\infty$, $D < 0$, korijeni nisu realni.



Za grafički prikaz mijenjanja korijena, kad se m mijenja od $-\infty$ do $+\infty$, potrebno je riješiti zadanu jednadžbu po m

$$mx^2 - 2x^2 + 3x + m + 2 = 0$$
$$m(x^2 + 1) = 2x^2 - 3x - 2$$
$$m = \frac{2x^2 - 3x - 2}{x^2 + 1},$$

i konstruirati odgovarajući grafik u pravokutnom koordinatnom sistemu xOm (vidi sliku). Tada se promatranjem apscisa točaka (korijeni za odnosnu vrijednost od m), što ih čine paralele apscisnoj osi s krivuljom, dolazi do jednakih rezultata kao i pri algebarskom rješavanju. Na pr. za vrijednosti od m, koje su manje od $-\frac{5}{2}$ vidimo da nema realnih korijena, jer paralela s osi x povučena bilo kojom točkom ovog intervala ne siječe dobivenu krivulju. Za $m = -\frac{5}{2}$ imamo jedan dvostruki korijen $x = \frac{1}{3}$, jer paralela s osi x u toj točki dodiruje krivulju i t. d.

b) Ako je m sadržano u intervalu α) $\frac{7}{10} < m < \frac{5}{10}$, tada se samo jedan korijen zadane jednadžbe nalazi između -3 i $+3$ jer je

$$f(-3) f(+3) = (2m - 5)(10m - 7) < 0$$

za $\frac{7}{10} < m < \frac{5}{2}$; β) $-\frac{5}{2} \leqslant m < \frac{7}{10}$ oba se korijena nalaze između -3 i $+3$, jer su tada ispunjeni svi za to potrebni uvjeti:

1) $D = 9 - 4(m-2)(m+2) \geqslant 0$

za $-\frac{5}{2} \leqslant m \leqslant \frac{5}{2}$,

2) $af(-3) = (m-2)(2m-5) > 0$

za $m < 2$, $m > \frac{5}{2}$;

3) $af(+3) = (m-2)(10m-7) > 0$

za $m < \frac{7}{10}$, $m > 2$;

4) $-3 < \frac{S}{2} < 3$ ili $-3 < -\frac{3}{2(m-2)} < 3$

za $m < \frac{3}{2}$, $m > \frac{5}{2}$.

Grafički se do istih rezultata dolazi tako, da se povuku paralele s osi m, čije su jednadžbe $x = -3$ i $x = 3$, zatim se nađu ordinate onih točaka, u kojima te paralele sijeku krivulju i tada se zaključuje promatranjem apscisa točaka, što ih s krivuljom čine paralele s osi x.

Miketinac Milivoj 8.d r. 3. g. Zagreb

261. *Tangente povučene iz točke $T(x_0, y_0)$ na parabolu $y^2 = 8x$ zatvaraju pravi kut, Točka T udaljena je od fokusa F parabole za dužinu $d = 5$, a ima pozitivnu ordinatu. Utvrdi, da pravac određen diralištima onih tangenata, prolazi kroz fokus F, pa odredi tetivu, koja spaja dirališta, i omjer, u kojem fokus dijeli tu tetivu!*

Parabola $y^2 = 8x$ ima fokus $F(2, 0)$ i ravnalicu ili direktisu $x = -2$. Da tangente iz točke $T(x_0, y_0)$ na parabolu budu medusobno okomite, mora točka $T(x_0, y_0)$ ležati na ravnalici. Kako je $\overline{FT} = 5$, a udaljenost fokusa F od ravnalice $p = 4$, izlazi, da je pozitivna ordinata točke T: $y_0 = 3$.

Stoga je $T(x_0, y_0) \equiv T(-2, 3)$. Koordinate dirališta tangenata $D_1(x_1, y_1)$, $D_2(x_2, y_2)$ na parabolu iz točke $T(x_0, y_0) \equiv T(-2, 3)$ određuju se iz sistema jednadžbi:

$$\left.\begin{aligned} y_0 y &= p(x_0 + x) \\ y^2 &= 2px \end{aligned}\right\} \text{ ili } \left.\begin{aligned} 3y &= 4(-2 + x) \\ y^2 &= 8x \end{aligned}\right\}$$

$$D_1(x_1, y_1) \equiv D_1(8, 8),\ D_2(x_2, y_2) \equiv D_2\left(\frac{1}{2}, -2\right).$$

Da točke $D_1(8, 8)$, $F(2, 0)$, $D_2\left(\frac{1}{2}, -2\right)$ leže na istom pravcu mora biti

$$8(0 + 2) + 2(-2 - 8) + \frac{1}{2}(8 - 0) \equiv 0,$$

a to i jest.

Dužina tetive

$$\overline{D_1D_2} = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 8\right)^2 + (-2 - 8)^2} = 12{,}5.$$

Omjer λ, u kojem fokus F dijeli tetivu $\overline{D_1D_2}$, dobije se iz jedne od relacija:

$$2 = \frac{8 - \frac{1}{2}\lambda}{1 - \lambda}, \quad 0 = \frac{8 + 2\lambda}{1 - 2}.$$

$$\lambda = -4.$$

Basar Ivan, uč. 7.b r. g Karlovac

260. *Koju jednadžbu ima elipsa $8x^2 + 9y^2 = 108$ u koordinatnom sustavu, što ga čine tangenta (os apscisa) i normala u točki $M(3,2)$ te elipse, i koji je tako orijentiran, da središte elipse leži u trećem kvadrantu?*

Jednadžba tangente u točki $M(3,2)$ je $4x + 3y - 18 = 0$, a normale $3x - 4y - 1 = 0$. Ako koordinate u novom sustavu označimo sa α i β, onda je prema formuli za daljinu točke od pravca:

$$\alpha = \frac{3x - 4y - 1}{5}, \quad \beta = \frac{4x + 3y - 18}{5},$$

a odatle je

$$x = \frac{3\alpha + 4\beta + 15}{5}, \quad y = \frac{-4\alpha + 3\beta + 10}{5}.$$

Ako te izraze uvrstimo mjesto x i y u jednadžbu elipse, dobivamo

$$216\alpha^2 - 24\alpha\beta + 209\beta^2 + 1500\beta = 0$$

kao jednadžbu elipse u novom sustavu.

Zadatak se može riješiti i ovako: Pomaknimo koordinatni sustav paralelno tako, da ishodište novog sustava bude u točki $M(3, 2)$! Jednadžba je elipse u novom sustavu (γ, δ): $8(\gamma + 3)^2 + 9(\delta + 2)^2 = 108$. Ako sustav (γ, δ) zaokrenemo za kut φ, u novom sustavu (α, β) su koordinate $\gamma = \alpha\cos\varphi - \beta\sin\varphi$, $\delta = \alpha\sin\varphi + \beta\cos\varphi$. Prema zadatku valja sustav (γ, δ) zaokrenuti za kut $(-\varphi)$ određen relacijama:

$$tg(-\varphi) = -\frac{4}{3}, \quad \sin(-\varphi) = -\frac{4}{5}, \quad \cos(-\varphi) = \frac{3}{5},$$

i prema tome je

$$\gamma = \frac{3}{5}\alpha + \frac{4}{5}\beta, \quad \delta = -\frac{4}{5}\alpha + \frac{3}{5}\beta.$$

Uvrstimo li te izraze za γ i δ u jednadžbu $8(\gamma + 3)^2 + 9(\delta + 2)^2 = 108$, tražena je jednadžba elipse

$$216\alpha^2 - 24\alpha\beta + 209\beta^2 + 1500\beta = 0.$$

S. Š-ka

262. *Ako su a, b, c tri različita pozitivna broja, tad je*

$$ab(a + b) + bc(b + c) + cb(c + a) > 6abc.$$

Kada se podeli sa abc data nejednakost se može napisati u oblíku

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + \frac{a}{c} + \frac{c}{a} > 6. \quad (1)$$

Из очигледне неједнакости $(a - b)^2 > 0$ излази $\frac{a^2 + b^2}{ab} > 2$, тј. $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} > 2$. На иси начин је и $\frac{b}{c} + \frac{c}{b} > 2$, $\frac{a}{c} + \frac{c}{a} > 2$. Лева страна неједнакости (1) је очигледно већа од 6, чиме је доказана и дата неједнакост.

Надрљански Сава
уч. 7б р. г. »И. Предић«, Панчево

263. Izračunaj:

$$A = \frac{16a^2 - (b - c)^2}{(4a + c)^2 - b^2} + \frac{b^2 - (c - 4a)^2}{(4a + b)^2 - c^2} + \frac{c^2 - (4a - b)^2}{(b + c)^2 - 16a^2}.$$

Imamo

$$A = \frac{(4a - b + c)(4a + b - c)}{(4a + c - b)(4a + c + b)} + \frac{(b - c + 4a)(b + c - 4a)}{(4a + b - c)(4a + b + c)} + \frac{(c - 4a + b)(c + 4a - b)}{(b + c - 4a)(b + c + 4a)} =$$

$$= \frac{4a + b - c}{4a + b + c} + \frac{b + c - 4a}{4a + b + c} + \frac{4a - b + c}{4a + b + c} = \frac{4a + b + c}{4a + b + c} = 1.$$

Doglod Arif, uč. 5a r. g. Zenica

264. *Neka se dokaže: ako je $A = a^2 - bc$, $B = b^2 - ac$, $C = c^2 - ab$, onda je $A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC$ jednako $(a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)^2$.*

Prema uvjetima navedenim u zadatku biće: $A^3 = a^6 - 3a^4bc + 3a^2b^2c^2 - b^3c^3$, $B^3 = b^6 - 3ab^4c + 3a^2b^2c^2 - a^3c^3$, $C^3 = c^6 - 3abc^4 + 3a^2b^2c^2 - a^3b^3$, $-3ABC = 3a^3b^3 + 3a^3c^3 + 3b^3c^3 - 3a^4bc - 3ab^4c - 3abc^4$.

Kad saberemo gornje jednakosti dobivamo:
$A^3 + B^3 + C^3 - 3ABC = a^6 + b^6 + c^6 - 6a^4bc - 6ab^4c - 6abc^4 + 9a^2b^2c^2 + 2a^3b^3 + 2a^3c^3 + 2b^3c^3$ t. j.

$$A^3+B^3+C^3-3ABC = a^6+b^6+c^6+9a^2b^2c^2+2(a^3b^3+a^3c^3+b^3c^3-3a^4bc-3ab^4c-3abc^4)$$

ili

$$A^3+B^3+C^3-3ABC=(a^3+b^3+c^3-3abc)^2,$$

što je i trebalo dokazati.

Mesihović Behđed, uč. 5_4 r. g. Mostar

265. *Odredi graničnu vrijednost izraza:*

$$\frac{1-\cos^3 x}{x \sin x \cos x} \quad \text{za} \quad x \to 0.$$

Imamo

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos^3 x}{x\sin x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos x)(1+\cos x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos^2 x)(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\sin x\cos x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x(1+\cos x+\cos^2 x)}{x\cdot\cos x(1+\cos x)} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1+\cos x+\cos^2 x}{\cos x(1+\cos x)} = \frac{3}{2}.$$

Martinis Vinko
svrš. uč. g. »F. Višnjić«, Bijeljina

Riješili zadatke iz 4. broja

Basar Ivan, uč. 8. r. gimn. Karlovac, 253, 254, 255, 256, 258, 259, 260, 261, 265; *Čanji Ema*, uč. 7_5 r. g. Sombor, 253, 254; *Čepulić Vladimir*, uč. 8. c raz. kl. gimn. Zagreb, 253, 255, 256, 257, 258, 259, 262, 263, 264, 265; *Doglod Arif*, uč. 5. b r. g. Zenica, 263; *Gros Mladen*, dij. 6. a r. kl. g. Ljubljana, 253, 254; *Kulišić Petar*, uč. 7. a r. g. Dubrovnik, 253, 254, 255, 256, 258, 259; *Marjanović Nikola*, uč. 7. a r. 2. gimn. Celje, 253, 254; *Martinis Vinko*, svrš. uč. 8. r. g. »F. Višnjić«, Bijeljina, 253, 254, 255, 256, 257, 258, 259, 260, 261, 262, 263, 264, 265; *Mesihović Behđed*, uč. 5_4 raz. gimn. Mostar, 253, 254, 257, 263, 264; *Miketinac Milivoj*, uč. 8. r. g. Zagreb, 253, 254, 258, 259, 260, 261, 265; *Petričević Josip*, uč. 8. raz. 3. g. Zagreb, 258; *Radolović Josip*, uč. 7. a raz. g. »B. Sekulić«, Pula, 253, 254, 259; *Režić Ksenija*, uč. 5. d raz. 1. g. Split, 257, 263, 264; *Šehmić Ratko*, uč. Blace, 263; *Божовић Душан*, уч. 8_1 раз. 15 беогр. г. 259, 261; *Врачарић Мирјана*, уч. 6_4 р. г. Сомбор, 253, 254, 259; *Грубнић Босиљка*, уч. 5а р. г. »Св. Марковић«, Нови Сад, 253, 254; *Ђенадић Драгољуб*, уч. 8_1 раз. г. Прокупље, 253, 254, 259 (дел.), 263; *Јеремић Биљана*, уч. 5_4 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 253, 254, 262, 263, 264, *Јеремић Душан*, сврш. уч. 8 раз. г. »Св. Марковић«, Ниш, 253, 254, 256, 258, 259, 260, 261; *Јеремић Ђурђе*, уч. 5_6 раз. г. »Св. Марковић«, Ниш, 253, 254, 258, 262, 263, 264; *Маринова Викторија*, уч. 8 раз. кл. г. »J. Б. Тито«, Битола, 261; *Надрљански Сава*, уч. 7*b* раз. г. »У. Предић«, Панчево, 256, 259, 263, 264; *Перме Томислав*, уч. 7б р. гимн. »Ст. Сремац«, Ниш, 253, 254, 262; *Петровић Момчило*, уч. 7_3 раз. г. Земун, 254; *Поповић Љубомир*, уч. 7. р. г. Аранђеловац, 254; *Шулић Милан*, уч. 7 раз. г. Сарајево, 253, 254, 256 (дел.).

Rješenja zadataka iz fizike

136. *Koliko puta većom brzinom bi se morala okretati Zemlja, da tijela na ekvatoru ne bi imala težinu? Gravitacija na ekvatoru je* 978,04 *cm* s^{-2}, *a akceleracija centrifugalne sile na ekvatoru je* 3,385 *cm* s^{-2}.

Rješenje: Da se Zemlja okreće, gravitacija na ekvatoru bi bila

$$g = 978{,}04 + 3{,}385 = 981{,}425 \text{ cm } s^{-2}.$$

Akceleracija centrifugalne sile na ekvatoru Zemlje je

$$a = \omega^2 R = 3{,}385 \text{ cm } s^{-2} \qquad (1)$$

gdje je ω kutna brzina Zemlje, a R je polumjer Zemlje. Kad tijelo na ekvatoru ne bi imalo težine, Zemlja bi se morala okretati takvom kutnom brzinom Ω, da bi akceleracija centrifugalne sile $a_1 = \Omega^2 R$ bila jednaka gravitaciji g, t. j.

$$\Omega^2 R = 981{,}425 \qquad (2)$$

Iz jednadžbe (1) i (2) izlazi dijeljenjem:

$$\frac{\Omega^2 R}{\omega^2 R} = \frac{981{,}425}{3{,}385},$$

odnosno

$$\frac{\Omega}{\omega} = \sqrt{290} \approx 17.$$

Zemlja bi se morala okretati 17 puta većom brzinom, da tijela na ekvatoru ne bi imala težinu.

137. *Srebrna nit duga* 20 *cm kod temperature* 0°*C napeta je horizontalno između dvije točke A i B. U sredini niti obješen je uteg P. Kroz tu nit puštamo električnu struju, koja grije nit na* 150°*C. a) Za koliko se spusti uteg P, ako je linearni koeficijent rastezanja za srebro* $\alpha = 0{,}0000194$? *b) Koliko puta je pomak utega P veći od produženja niti?*

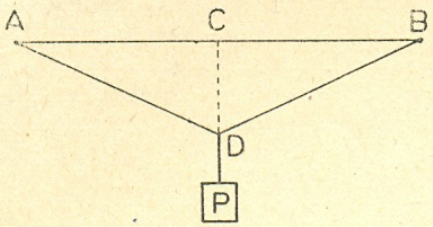
Rješenje: Nit $AB = l$ produži se za

$$\Delta l = l \cdot \alpha \cdot \Delta t = 20 \cdot 0{,}0000194 \cdot 150 = 0{,}0582\ cm.$$

U pravokutnom trokutu ACD je

$$AC = \frac{l}{2} = \frac{20}{2} = 10\ cm,\ \text{a}$$

$$AD = \frac{20 + 0{,}0582}{2} = 10{,}0291\ cm$$



a) Uteg P se spusti za

$$CD = \sqrt{10{,}0291^2 - 10^2} = 0{,}763\ cm;$$

b) Pomak utega P je $\frac{0{,}763}{0{,}058\,2} = \underline{13{,}1}$ puta veći od produženja niti AB.

138. *Električno grijalo podešeno, da ga priključimo na napon od* 110 *V, troši* 375 *W. Kako ćemo preudesiti to grijalo, da priključivši ga na napon od* 220 *V, troši istu snagu?*

Rješenje: Otpor grijala je

$$R = \frac{V^2}{S} = \frac{110^2}{375} = 32{,}3\ \Omega.$$

Otpor preuređenog grijala je

$$R' = \frac{V'^2}{S} = \frac{220^2}{375} = 129\ \Omega.$$

Grijalo moramo preurediti tako, da mu stavimo predotpor od $129 - 32{,}3 = \underline{96{,}7\ \Omega}$.

139. *Primarna uzvojnica transformatora ima* 4500 *navoja, a sekundarna* 150 *navoja. Primarna uzvojnica tog transformatora spojena je s naponom od* 3000 *V. Sekundarna uzvojnica je pak spojena s otpornom žicom. Ta žica ugrije* 15 *l vode za* 10 *minuta od* 15°*C do* 100°*C. a) Koliki je otpor te žice? b) Kako jaka struja teče primarnom uzvojnicom? (Pretpostavlja se, da transformator nema nikakvih gubitaka).*

Rješenje: Snaga S struje, koja teče sekundarnom uzvojnicom transformatora (a i primarnom), jednaka je nastalim gram-kalorijama u jednoj sekundi puta 4,18 vata, t. j.

$$S = \frac{15000\,(100 - 15)}{10 \cdot 60} \cdot 4{,}18 = 8882{,}5\ W.$$

Iz relacije

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{n_2}{n_1},$$

gdje je V_1 napon na krajevima primarne uzvojnice, V_1 napon na krajevima sekundarne uzvojnice, n_1 broj navoja u primarnoj uzvojnici, a n_2 broj navoja u sekundarnoj uzvojnici, izlazi

$$V_2 = 3000\,\frac{150}{4500} = 100\ V$$

a) Otpor R žice spojene na krajeve sekundarne uzvojnice je

$$R = \frac{V_2^2}{S} = \frac{100^2}{8\,882{,}5} = \underline{1{,}26\ \Omega}$$

b) Jakost struje I u primarnoj uzvojnici je

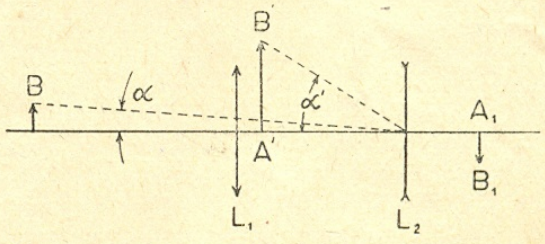
$$I = \frac{S}{V} = \frac{8\,882{,}5}{3000} = \underline{2{,}96\ A}.$$

140. *Optički sistem sastavljen je od dvije leće; jedne pozitivne i druge negativne. Žarišna daljina pozitivne leće je* 20 *cm, a negativne* 4 *cm. Ispred pozitivne leće u udaljenosti* 4,2 *m nalazi se predmet AB visok* 3 *cm. Predmet je postavljen okomito na optičku os i njegov kraj A nalazi se na optičkoj osi. a) Kolika mora biti udaljenost između leća, ako želimo, da se virtuelna slika A'B' predmeta AB nalazi* 20 *cm od negativne leće? b) Odredite kut pod kojim se vidi predmet AB iz mjesta, gdje je negativna leća, kad nema optičkog sistema! c) Odredite kut, pod kojim se vidi predmet AB iz mjesta gdje je negativna leća, kad postoji optički sistem! d) Koliko je povećanje tog optičkog sistema?*

Rješenje: Leća L_1 daje realnu sliku A_1B_1 predmeta AB u udaljenosti b od leće L_1.

Iz jednadžbe leće

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f},$$



gdje je a udaljenost predmeta od leće, b udaljenost slike od leće, a f žarišna daljina leće izlazi za

$$b = \frac{420 \cdot 20}{420 - 20} = 21\ cm.$$

Leća L_2 od realnog »predmeta« A_1B_1, daje virtualnu sliku $A'B'$, udaljenu 20 cm od leće. »Predmet« A_1B_1 je udaljen od leće za

$$a = \frac{20 \cdot 4}{20 - 4} = 5\ cm.$$

a) Iz slike vidimo, da je udaljenost d od leće L_2 do leće L_1

$$d = 21 - 5 = \underline{16\ cm}.$$

b) Kad ne bi bilo optičkog sistema, kut α pod kojim vidimo predmet AB, možemo izračunati iz relacije

$$tg\,\alpha = \frac{AB}{420 + 16}.$$

Iz gornje jednadžbe je:

$$\underline{\alpha = 0°\,23'\,39''}.$$

c) Kut α', pod kojim vidimo sliku $A'B'$, možemo izračunati

$$tg\,\alpha' = \frac{A'B'}{20},$$

a iz: $A'B' : A_1B_1 = 20 : 5$, odnosno iz

$$A_1B_1 : AB = 21 : 420$$

$$A'B' = \frac{AB \cdot 21}{420} \cdot \frac{20}{5} = \frac{3 \cdot 21 \cdot 20}{420 \cdot 5} = 0{,}6,$$

dakle $$tg\,\alpha' = \frac{0{,}6}{20},$$

pa je $$\underline{\alpha' = 1°43'6''}.$$

d) Povećanje našeg optičkog sistema je

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{1°43'6''}{23'39''} \approx \underline{4{,}4}.$$

Riješili zadatke iz fizike iz 4. broja

Basar Ivan, uč. 7. b raz. g. Karlovac, 136, 137, 138, 139, 140 (djel.); *Gros Mladen*, uč. 6. r. kl. gimn. Ljubljana, 136, 137, 138, 139; *Hendeković Josip*, uč. 6.b r. 2. gimn. Zagreb, 136 (djel.). 137, 138, 139; *Kulišić Petar*, uč. 7.a r. gimn. Dubrovnik, 136, 137, 138, 139; *Mesihović Behđed*, uč. 5. raz. g. Mostar, 139; *Miketinac Milivoj*, uč. 7.d raz. 3. g. Zagreb, 137, 138, 139; *Petričević Josip*, uč. 8. r. 3. g. Zagreb, 137 (djel.), 138, 139, *Ђенадић Драгољуб*, уч. 8 раз. г. Прокупље, 136, 137; *Јеремић Душан*, уч. 8_3 р. г. »Св. Марковић«, Ниш, 136, 137, 138, 139 (дел.); *Маринова Викторија*, уч. 8 кл. г. »Ј. Б. Тито«, Битола, 139 (дел.), *Поповић Љубомир*, уч. 7 раз. г. Аранђеловац, 137; *Шилић Милан*, уч. 7_5 р. 2 г. Сарајево, 137 (делом.), 138, 139 (делом.).

Vježbe za učenike viših razreda gimnazije

O rješavanju općih jednadžbi 3. stepena

Razmatrajmo najprije kubni polinom

$$x^3 + 3px^2 + 3qx + r, \tag{1}$$

pa se pitajmo, kad se on dade prikazati u obliku

$$A(x + \alpha)^3 + B(x + \beta)^3. \tag{2}$$

Ako izraz (2) poređamo po potencijama od x, izlazi, da je on jednak

$$\begin{aligned} &x^3(A + B) + 3x^2(A\alpha + B\beta) + \\ &+ 3x(A\alpha^2 + B\beta^2) + A\alpha^3 + B\beta^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Kako on mora biti identički jednak polinomu (1), mora postojati ovaj sistem jednadžbi

$$\begin{aligned} A + B &= 1, \\ A\alpha + B\beta &= p, \\ A\alpha^2 + B\beta^2 &= q, \\ A\alpha^3 + B\beta^3 &= r. \end{aligned} \tag{4}$$

Treba dakle da riješimo sistem od 4 jednadžbe s 4 nepoznanice A, B, α, β. Taj sistem, koji izgleda na prvi pogled dosta zamršen, riješit će se lako i brzo, ako prve 3 jednadžbe sistema pomnožimo redom s $v = \alpha\beta$, $u = -(\alpha + \beta)$, 1 i zbrojimo i zatim posljednje 3 jednadžbe sistema s v, u 1 i zbrojimo. Kako je $A(v + \alpha u + \alpha^2) = A(\alpha\beta - \alpha^2 - \alpha\beta + \alpha^2) = 0$, $B(v + \beta u + \beta^2) = 0$ i slično

$$A\alpha(v + \alpha u + \alpha^2) = 0,\quad B\beta(v + \beta u + \beta^2) = 0,$$

dolazimo do sistema

$$\begin{aligned} v + up + q &= 0, \\ vp + uq + r &= 0. \end{aligned} \tag{5}$$

To je linearan sistem od 2 jednadžbe s 2 nepoznanice. Rješenje tog sistema nalazi se lako

$$u = \frac{pq - r}{q - p^2},\quad v = \frac{rp - q^2}{q - p^2}. \tag{6}$$

Kad smo izračunali u t. j. negativni zbroj veličina α, β i njihov produkt v, α i β su korijeni jednadžbe

$$z^2 + \frac{pq - r}{q - p^2}z + \frac{rp - q^2}{q - p^2} = 0. \tag{7}$$

Brojevi α i β su realni, ako je ispunjen uvjet

$$\left(\frac{pq - r}{q - p^2}\right)^2 - 4\frac{rp - q^2}{q - p^2} \geqq 0$$

ili također

(8) $(pq - r)^2 - 4(q - p^2)(rp - q^2) \geqq 0.$

Ovo je diskriminanta općenite kubne jednadžbe; kad bi razmatrali jednadžbu $x^3 + px + q = 0$, ta bi diskriminanta, kako neposredno izlazi, bila $27q^2 + 4p^3$.

Rješenjem jednadžbe (7) dobivamo brojeve α i β; da izračunamo A i B, treba samo još da riješimo sistem $A + B = 1$, $A\alpha + B\beta = p$.

Predočivanje kubnog polinoma (1) u obliku (2) primijenit ćemo na rješavanje kubne jednadžbe $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$.

Neka je na pr. zadana jednadžba

(9) $$x^3 + \frac{10}{3}x^2 + 4x + \frac{16}{9} = 0.$$

Sistem (4) poprima ovaj oblik:

$$A + B = 1,$$

$$A\alpha + B\beta = \frac{10}{9},$$

$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \frac{4}{3},$$

$$A\alpha^3 + B\beta^3 = \frac{16}{9}.$$

Sistem (5) postaje sad

$$v + \frac{10}{9}u + \frac{4}{3} = 0,$$

$$\frac{10}{9}v + \frac{4}{3}u + \frac{16}{9} = 0.$$

Rješenjem tog sistema nalazimo $u = -3$, $v = 2$. Dakle su α i β korijeni jednadžbe

$$z^2 - 3z + 2 = 0.$$

Izlazi $\alpha = 1$, $\beta = 2$ ili $\alpha = 2$, $\beta = 1$.

Sad treba riješiti sistem

$$A + B = 1, \quad A + 2B = \frac{10}{9}.$$

Nalazimo $A = \frac{8}{9}$, $B = \frac{1}{9}$.

Prema tomu možemo pisati

$$\frac{8}{9}(x + 1)^3 + \frac{1}{9}(x + 2)^3 \equiv$$

$$\equiv x^3 + \frac{10}{3}x^2 + 4x + \frac{16}{9}.$$

Jednadžbi (9) bit će dakle udovoljeno, kad je

$$8(x + 1)^3 + (x + 2)^3 = 0.$$

Rastavimo sad lijevu stranu [prema $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$] na faktore; imamo

$$[2(x + 1) + (x + 2)][4(x + 1)^2 - 2(x + 1)(x + 2) + (x + 2)^2] = 0$$

i odatle

(10) $$2x + 2 + x + 2 = 0,$$

(11) $$4(x+1)^2 - 2(x+1)(x+2) + (x+2)^2 = 0.$$

Iz (10) izlazi $3x = -4$, $x = -\frac{3}{4}$, a iz (11) $3x^2 + 6x + 4 = 0$.

$$x_{2,3} = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 48}}{6} = \frac{-6 \pm 2i\sqrt{3}}{6}, \quad \text{t. j.}$$

$$x_2 = -1 + \frac{i}{3}\sqrt{3}, \quad x_3 = -1 - \frac{i}{3}\sqrt{3}.$$

Tako smo našli sva 3 korijena kubne jednadžbe; jedan je realan, a ostala su 2 konjugirano kompleksna.

Ako jednadžba nema drugog člana, t. j. ako je $p = 0$, rješenje jednadžbe još je jednostavnije. Neka se na pr. riješi jednadžba

$$x^3 - 9x + 28 = 0.$$

Ako načinimo sistem (4) i pomnožimo ga s v, u, 1, nalazimo $v = 3$, $u = \frac{28}{3}$; dakle su α i β korijeni jednadžbe

$$z^2 + \frac{28}{3}z + 3 = 0.$$

$\alpha = -\frac{1}{3}$, $\beta = -9$; A i B izlaze iz sistema

$$A + B = 1, \quad -\frac{1}{3}A - 9B = 0,$$

$$A = \frac{27}{26}, \quad B = -\frac{1}{26}.$$

Dolazi se do jednadžbe

$$27\left(x - \frac{1}{3}\right)^3 - (x - 9)^3 = 0 \qquad \text{t. j.}$$

$$3x - 1 - x + 9 = 0, \quad x_1 = -4,$$

$$9\left(x - \frac{1}{3}\right)^2 + 3\left(x - \frac{1}{3}\right)(x - 9) + (x - 9)^2 = 0$$

ili $x^2 - 4x + 7 = 0$, $x_{2,3} = 2 \pm i\sqrt{3}$.

Primjeri: Riješi na pokazani način ove jednadžbe:

$65x^3 - 9x^2 + 27x - 27 = 0$ $\left[x_1 = \frac{3}{5}, \; x_{2,3} = \frac{1}{13}(-3 \pm 6i\sqrt{3})\right]$, $x^3 - 6x^2 - 12x + 112 = 0$ $[x_1 = -4, \; x_{2,3} = 5 \pm i\sqrt{3}]$,

$x^3 - 24x - 56 = 0$ $[x_1 = 2; \; x_{2,3} = -1 \pm 3i\sqrt{3}]$.

Doklegod je kubna diskriminanta (8) pozitivna, uvijek će nam izaći jedan realni korijen i dva konjugirano kompleksna korijena.

Treba da spomenemo, da smo na navedeni način riješili općenu kubnu jednadžbu s pozitivnom diskriminantom bez primjene »*Cardanove formule*«, kako je to uobičajeno. Cardanovu ćemo formulu i mi jednom izvesti.*

Što se može reći o rješavanju kubne jednadžbe, ako je diskriminanta negativna? Tad su brojevi α i β konjugirano kompleksni, pa su A i B kao i $\sqrt[3]{A}$ i $\sqrt[3]{B}$ kompleksni. Jednadžba ima u tom slučaju, kako se lako dade pokazati, sva tri korijena realna; ipak ne uspijeva algebarskim putem doći do tih realnih rješenja. Taj je slučaj prozvan od starijih matematičara »*casus irreducibilis*« jer se ne da kompleksni oblik svesti na realni.

Jednadžba se u tom slučaju rješava trigonometrijski; ipak ćemo pokazati, kako se u nekim specijalnim slučajevima i na pokazani način mogu izračunati sva 3 realna korijena kubne jednadžbe.

Razmatrajmo jednadžbu

$$x^3 - 9x^2 + 26x - 24 = 0.$$

Ovdje je kubna diskriminanta negativna, α i β su kompleksni. Načinimo sistem:

$$A + B = 1,$$
$$A\alpha + B\beta = -3,$$
$$A\alpha^2 + B\beta^2 = \frac{26}{3},$$
$$A\alpha^3 + B\beta^3 = -24.$$

Množenjem s v, u, 1 izlazi

$$v - 3u + \frac{26}{3} = 0,$$
$$-3v + \frac{26}{3}u - 24 = 0 \quad \text{i odatle}$$
$$u = 6, \quad v = \frac{28}{3}.$$

Dakle su α i β korijeni jednadžbe

$$z^2 + 6z + \frac{28}{3} = 0,$$
$$z = -3 \pm \frac{i\sqrt{3}}{3}.$$

Iz $A + B = 1$,

$$A\left(-3 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right) + B\left(-3 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right) = -3$$

ili $A + B = 1$, $A - B = 0$ izlazi

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{2}.$$

Dakle imamo

$$\frac{1}{2}\left(x - 3 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^3 + \frac{1}{2}\left(x - 3 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^3 = 0$$

t. j.

$$\left(x - 3 + \frac{i\sqrt{3}}{3} + x - 3 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\left[\left(x - 3 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^2 - \left(x - 3 + \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)\left(x - 3 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right) + \left(x - 3 - \frac{i\sqrt{3}}{3}\right)^2\right] = 0.$$

Odatle izlazi $2x = 6$, $x_1 = 3$,

$$x^2 - 6x + 9 + \frac{2ix\sqrt{3}}{3} - \frac{6i\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} - x^2 + 6x - 9 - \frac{1}{3} + x^2 - 6x + 9 - \frac{2ix\sqrt{3}}{3} + \frac{6i\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{3} = 0 \quad \text{ili}$$

$$x^2 - 6x + 8 = 0, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

Prema tomu su korijeni naše jednadžbe

$$x_1 = 3, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

Pita se, kad je takovo rješenje moguće t. j. kad se mogu u slučaju $D < 0$ na ovaj način izračunati sva tri realna korijena kubne jednadžbe.

Brojeve α i β pišemo u obliku

$\alpha = \gamma + i\sqrt{\delta}$, $\beta = \gamma - i\sqrt{\delta}$; tad je

$A + B = 1$, $A(\gamma + i\sqrt{\delta}) + \beta(\gamma - i\sqrt{\delta}) = p$ ili

$$\gamma(A + B) + i\sqrt{\delta}(A - B) = p \quad \text{ili}$$
$$\gamma + i\sqrt{\delta}(A - B) = p \quad \text{t. j.}$$
$$A - B = \frac{p - \gamma}{i\sqrt{\delta}} = -\frac{(p - \gamma)i\sqrt{\delta}}{\delta}.$$

Da budu A i B realni, treba da je $\gamma - p = 0$ ili $\gamma = p$. No kako je

$$\gamma = -\frac{u}{2} \quad \text{ili} \quad u = -2\gamma = -2p$$

i prema (6), $u = \frac{pq - r}{q - p^2}$ mora biti

$$-2p = \frac{pq - r}{q - p^2} \quad \text{t. j.}$$
$$2p^3 - 3pq + r = 0.$$

Ako je ovaj uvjet ispunjen, svaka se jednadžba $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$, gdje je $D < 0$, dade riješiti na pokazani način.

Riješi na pr. jednadžbe

a) $x^3 + 6x^2 + 9x + 2 = 0$ [$x_1 = -2$,

$$x_{2,3} = -2 \pm \sqrt{3}],$$

* Cardanova formula navedena je u 7. godištu nšaeg lista str. 24.

b) $x^3 + \frac{3}{2}x^2 - \frac{61}{4}x - \frac{63}{8} = 0$, $[x_1 = -\frac{1}{2}$. $x_2 = \frac{7}{2}$, $x_3 = -\frac{9}{2}]$,

c) $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$ $[x_1 = 1,\ x_2 = 2,\ x_3 = 3]$.

Iznesena metoda ne može se primijeniti ni u slučaju, kad je $D = 0$; u tom slučaju, ako nam nije poznata »Cardanova formula«, pisat će se jednadžba $x^3 + 3px^2 + 3qx + r = 0$, jer ima 2 korijena jednaka, u obliku

$$(x - x_1)^2 (x - x_2) = 0$$

i izjednačit će se koeficijenti jednako visokih potencija u x. Neka se na pr. riješi jednadžba

$$x^3 - 7x^2 + 16x - 12 = 0.$$

Imamo
$$2x_1 + x_2 = 7,$$
$$x_1^2 + 2x_1x_2 = 16,$$
$$-x_1^2x_2 = -12.$$

Iz prve i druge jednadžbe izlazi

$$x_1 = \frac{8}{3},\ x'_1 = 2,\ x_2 = 3,\ x'_2 = \frac{5}{3}.$$

Samo $x_1 = 2$, $x_2 = 3$ zadovoljavaju sva tri uvjeta, pa imamo $x_1 = x_3 = 2$, $x_2 = 3$.

Vježbe za prij. ispit iz matematike

(za učenike 8. razreda osmogod. škole)

Ponavljanje iz nižih razreda

Aritmetika

Izračunaj:

1. $$\left(\frac{-\frac{4}{5}}{\frac{5}{12} - \frac{3}{4}} + \frac{\frac{2}{9} - \frac{5}{8}}{\frac{3}{4} - \frac{2}{3}}\right) : \left(\frac{\frac{2}{5} - \frac{5}{12}}{\frac{2}{15} - \frac{1}{6}} - \frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{3}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{30}}\right).$$

Dvojne razlomke treba najprije urediti, t. j. svaki razlomak pomnožiti najm. zaj. višekratnikom svih nazivnika, koji dolaze u brojniku i nazivniku zadanih razlomaka. Brojnik i nazivnik prvog razlomka pomnožit ćemo sa 60, drugog sa 72, trećeg sa 60, a četvrtog sa 30. Izlazi

$$\left(\frac{-48}{25-45} + \frac{16-45}{54-48}\right) : \left(\frac{24-25}{8-10} - \frac{45-10}{25-7}\right) =$$
$$= \left(\frac{48}{20} - \frac{29}{6}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{35}{18}\right) = \left(\frac{12}{5} - \frac{29}{6}\right) : \left(\frac{1}{2} - \frac{35}{18}\right) =$$
$$= \frac{72-145}{30} : \frac{9-35}{18} = \left(-\frac{73}{30}\right) : \left(-\frac{26}{18}\right) =$$
$$= \frac{73}{5} \cdot \frac{3}{26} = \frac{219}{130}.$$

2. $$A = \frac{0{,}2^3 \cdot 0{,}04 \cdot \sqrt{\frac{0{,}48}{0{,}0003}}}{0{,}4^3 \cdot 0{,}05^2} : \frac{25^2 \cdot 0{,}4 - 0{,}64 \cdot 75 : 0{,}32}{56{,}25 \cdot 0{,}8 - 100 \cdot 0{,}35},$$

$$A = \frac{0{,}008 \cdot 0{,}04 \cdot 40}{0{,}064 \cdot 0{,}0025} : \frac{625 \cdot 0{,}4 - 2 \cdot 75}{45 - 35} =$$
$$= \frac{8 \cdot 4 \cdot 40 \cdot 100}{64 \cdot 25} : \frac{250 - 150}{10} = 2 \cdot 40 : 10 = 8.$$

3. Uvjeri se, da je

$$\sqrt{\left(\frac{11}{12} - \frac{\frac{4}{5} - \frac{3}{4}}{\frac{5}{6} - \frac{7}{9}}\right) : \frac{\frac{7}{6} - \frac{2}{3}}{\frac{5}{8} - \frac{5}{12}}} = \frac{1}{12}.$$

4. Izračunaj:

$$A = \sqrt{\left(7{,}5 - 2\frac{1}{4} + \frac{\frac{3}{5}}{0{,}04}\right) \cdot \frac{0{,}0004}{6\frac{1}{4}}} - 0{,}036.$$

Najprije treba da izračunamo $\frac{3}{5} : 0{,}04$; to je jednako $\frac{3}{5} : \frac{4}{100} = \frac{300}{20} = 15$; izraz u zagradi jednak je

$$\frac{15}{2} - \frac{9}{4} + 15 = \frac{81}{4};\ \frac{81}{4} \cdot \frac{0{,}0004}{6{,}25} = \frac{81}{62500}$$

$$A = \sqrt{\frac{81}{62500}} - 0{,}036 = \frac{9}{250} - 0{,}036 =$$
$$= 0{,}036 - 0{,}036 = 0.$$

5. $A = 4x^2 - \{-3x^2 - [-4x - (2x^3 - 5x^2 + 6) - 2x^2] - 5x^3\} + 4.$

Pokus za $x = -3$.

Zagrada se možemo riješiti postepeno, t. j. najprije ok uglih, zatim uglastih i napokon vitičastih, ali i također svih odjednom. Radeći na drugi način imamo:

$$A = 4x^2 + 3x^2 - 4x - 2x^3 + 5x^2 - 6 - 2x^2 + 5x^3 + 4 = 3x^3 + 10x^2 - 4x - 2.$$

Pokus za $x = -3$:

$$A = 4 \cdot 9 - \{-27 - [12 - (-54 - 45 + 6) - 18] + 135\} + 4 = 36 - \{-27 - [12 + 93 - 18] + 135\} + 4 = 36 - \{-27 - 87 + 135\} + 4 = 36 - 21 + 4 = 19.$$

Stavimo li $x = -3$ u rezultat izlazi

$$-81 + 90 + 12 - 2 = 19$$

t. j. pokus se slaže.

6. Uvjeri se da je

$$A = (3x - 8y)^2 - (8y + 3x)^2 - (3x + 8y)(8y - 3x) = 9x^2 - 96xy - 64y^2.$$

7. Izračunaj:

$$A = (4a^2 - 5b^2 + 6c^2)^2 - (3a^2 + 2b^2 - 5c^2)^2.$$

$$A = [(4a^2 - 5b^2) + 6c^2]^2 - [(3a^2 + 2b^2) - 5c^2]^2 =$$
$$= 16a^4 - 40a^2b^2 + 25b^4 + 12c^2(4a^2 - 5b^2) +$$
$$+ 36c^4 - [9a^4 + 12a^2b^2 + 4b^4 - 10c^2(3a^2 +$$
$$+ 2b^2) + 25c^4] = 7a^4 - 52a^2b^2 + 21b^4 +$$
$$+ 78a^2c^2 - 40b^2c^2 + 11c^4.$$

Ako uočimo, da je to razlika kvadrata, možemo također pisati:

$$A = (4a^2 - 5b^2 + 6c^2 + 3a^2 + 2b^2 - 5c^2)(4a^2 -$$
$$- 5b^2 + 6c^2 - 3a^2 - 2b^2 + 5c^2) = (7a^2 - 3b^2 +$$
$$+ c^2)(a^2 - 7b^2 + 11c^2) = 7a^4 - 52a^2b^2 +$$
$$+ 21b^4 + 78a^2c^2 - 40b^2c^2 + 11c^4.$$

8. $A = -(-4x^2 - 5y^2)^2 - (-3x^2 - 6y^2)^2 -$
$$- (-4x^2 - 3y^2)(3y^2 - 4x^2).$$

Pokus za $x = -1$, $y = -2$.

$$A = -16x^4 - 40x^2y^2 - 25y^4 - 9x^4 - 36x^2y^2 -$$
$$- 36y^4 - (-4x^2 + 3y^2)(-4x^2 - 3y^2) = -$$
$$- 25x^4 - 76x^2y^2 - 61y^4 - 16x^4 + 9y^4 -$$
$$= -41x^4 - 76x^2y^2 - 52y^4.$$

Ako za $x = -1$, $y = -2$, stavimo u zadatak, izlazi $-(-4 - 20)^2 - (-3 - 24)^2 -$ $- (-4 - 12)(12 - 4) = -576 - 729 + 128 =$ $= -1177$, a ako u rezultat, imamo

$$-41 - 304 - 832 = -1177.$$

Geometrija

9. Kolika je duljina zajedničke tangente dvaju krugova polumjera $R = 7{,}2$ *cm*, $r = 1{,}8$ *cm* koja se dotiču izvana?

Ta je zajednička tangenta (nacrtaj sliku) kateta pravokutnog trokuta, gdje je hipotenuza jednaka udaljenosti središta obaju krugova $R + r$, a druga kateta jednaka razlici polumjera $R - r$. Zato je

$$t = \sqrt{(R + r)^2 - (R - r)^2} = \sqrt{2R \cdot 2r} =$$
$$= 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{7{,}2 \cdot 1{,}8} = 2 \cdot 3{,}6 = 7{,}2 \text{ cm}.$$

10. Odredi visinu, koja pripada krakovima istokračnog trokuta, komu je baza 9,6 *cm*, a krak 6 *cm*.

Visina pripadna bazi jednaka je

$$v = \sqrt{6^2 - \left(\frac{9{,}6}{2}\right)^2} = \sqrt{6^2 - 4{,}8^2} =$$
$$\sqrt{10{,}8 \cdot 1{,}2} = \sqrt{1{,}2^2 \cdot 3^2} = 3{,}6,$$

zato je površina $4{,}8 \cdot 3{,}6$ *cm*^{2}; ako je tražena visina v', to je također $\frac{6 \cdot v'}{2} = 4{,}8 \cdot 3{,}6$ ili $3v' = 4{,}8 \cdot 3{,}6$, $v' = 1{,}2 \cdot 4{,}8 = 5{,}76$ *cm*.

11. Zadan je opseg romba $o = 100$ *cm* i dijagonala $d_1 = 4{,}8$ *cm*; kolika je površina?

Stranica je romba 2,5 *cm*. Kako je po Pitagorinom poučku

$$\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = a^2, \quad \text{to je}$$

$$2{,}4^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 6{,}25, \quad \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 6{,}25 - 5{,}76 = 0{,}49,$$

$$\frac{d_2}{2} = 0{,}7, \quad d_2 = 1{,}4 \text{ cm}.$$

Zato je $P = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{4{,}8 \cdot 1{,}4}{2} = 3{,}36$ *cm*^{2}.

12. U istostranom trokutu stranica $a = 6$ *cm*, uzmi počevši od svakog vrha $\frac{1}{3}a$ i spoji dobivena dijelišta; dobivaš pravilni šesterokut. Kolika je njegova površina?

Kako je svaka stranica pravilnog 6-kuta $\frac{1}{3}a$, površina je

$$6 \cdot \frac{a^2}{9} \cdot \frac{1}{4}\sqrt{3} = \frac{a^2}{6}\sqrt{3} = 6\sqrt{3} \approx 10{,}392 \text{ cm}^2.$$

13. Kraća je dijagonala romba 4,5 *cm*, visina je 3,6 *cm*; kolika je stranica i površina?

Ako je $ABCD$ zadani romb (nacrtaj sliku), DE njegova visina, to iz pravokutnog trokuta DEB izlazi

$$EB = \sqrt{\overline{DB}^2 - \overline{DE}^2} = \sqrt{4{,}5^2 - 3{,}6^2} =$$
$$= \sqrt{8{,}1 \cdot 0{,}9} = 2{,}7 \text{ cm},$$

iz ADE izlazi $a^2 = 3{,}6^2 + (a - 2{,}7)^2$ ili $a^2 = 3{,}6^2 + a^2 - 5{,}4a + 7{,}29$, $5{,}4a = 12{,}96 +$ $+ 7{,}29 = 20{,}25$, $a = \frac{20{,}25}{5{,}4} = \frac{2025}{540} = 3{,}75$ *cm*; zato je $P = av = 3{,}75 \cdot 3{,}6 = 13{,}5$ *cm*^{2}.

14. Nacrtaj istostrani trokut stranice $a = 6$ *cm* i nad svakom stranicom nacrtaj kvadrat i spoji njegove vrhove. Dobivaš šesterokut. Kolika je njegova površina?

Površina je istostranog trokuta $\frac{a^2}{4}\sqrt{3}$, površina 3 kvadrata $3a^2$, površina ostalih triju trokuta je $\frac{3a^2}{4}\sqrt{3}$; ukupna je površina

$$3a^2 + a^2\sqrt{3} = a^2(3 + \sqrt{3}) \approx 36 \cdot 4{,}732 =$$
$$= 170,\ 352 \text{ cm}^2.$$

15. Pokaži, da je zbroj stranice kvadrata i stranice istostrana trokuta upisanih u isti krug gotovo jednak polovini opsega toga kruga.

Stranica kvadrata x upisana u krug polumjera r izlazi iz $x^2 + x^2 = 4r^2$, $x = r\sqrt{2}$; da odredimo stranicu y istostrana trokuta, sjetimo se, da je polumjer oko istostrana trokuta

opisana kruga dvije trećine visine istostrana trokuta t. j.

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{y}{2}\sqrt{3}=r,\quad y=\frac{3r}{\sqrt{3}}=r\sqrt{3}.$$

Kako je

$$\sqrt{2}=1{,}41421\ldots,\quad \sqrt{3}=1{,}73205\ldots,$$

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=3{,}14626,\quad r(\sqrt{2}+\sqrt{3})=r\cdot 3{,}14626,$$

dok je polovina opsega kruga $r\cdot 3{,}14159$, pa je razlika manja od $r\cdot 0{,}005$.

Možda ste zaboravili?

U 5 razredu osmogodišnje škole čuje se pojam deljivosti dva broja i specijalni slučajevi deljivosti brojevima 2, 3, 4, 5, 9. Tu se pravila nauče (bez dokaza) i to ostaje kao trajno, pomoćno sredstvo u daljem radu, specijalno u skraćivanju razlomaka. Međutim, zapaženo je da neki učenici viših razreda gimnazije i srednjih-stručnih škola, na pitanje: zašto je jedan broj deljiv sa 3 ako mu je »zbir cifarskih vrednosti« deljiv sa 3 (traži se ilustracija dokaza), ne znaju da daju odgovor. Pravilo je verbalno naučeno, bez pokušaja da se naučena misao analizira ili (čak) dokaže.

Cilj je ovog prikaza da potseti učenike na izvesna pravila deljivosti i da potstakne na razmišljanje u mnogim »sitnim« detaljima aritmetike. Dokazi su elementarne prirode.

1. Jedan broj je deljiv sa tri ako mu je »zbir cifarskih vrednosti« deljiv sa tri.

Ako se pođe od činjenica, da je pri delenju

$$10^n : 3,\quad n=1,2,3,\ldots$$

svake dekadne jedinice sa tri uvek ostatak jednak jedinici, osobine

$$(a\cdot b):c=a\cdot b/c$$

kao i komutativnog i asocijativnog zakona kod sabiranja — imamo sledeće.

Posmatrajmo broj 6264. Na osnovu rečenog i osobine, da se svaki prirodni broj može napisati u obliku [1]

$$a\cdot 10^n+b\cdot 10^{n-1}+c\cdot 10^{n-2}+\cdots \qquad (A)$$

gde su $a, b, c, \ldots$ cifarske vrednosti broja, kao i pravila

$$(a+b):c=a:c+b:c$$
$$(a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$$

proizlazi

$$6264=6000+200+60+4=6\cdot 10^3+$$
$$+2\cdot 10^2+6\cdot 10^1+4\cdot 10^0 \quad \text{t. j.}$$

$$6264=(999+1)\cdot 6+(99+1)\cdot 2+(9+1)\cdot 6+4$$

ili
$$6264=(999\cdot 6+99\cdot 2+9\cdot 6)+$$
$$+(6+2+6+4) \qquad (B)$$

Kako je izraz u prvoj zagradi sigurno deljiv sa tri (zašto?), pa ako je *zbir* i u drugoj zagradi deljiv sa tri, onda je i posmatrani broj 6264 deljiv sa tri.

Međutim, zbir u drugoj zagradi je »zbir cifarskih vrednosti« datog broja. A kako se svaki broj može napisati oblikom (B), to zaključujemo opšte pravilo za deljivost brojem 3.

Pokaži postupak deljivosti brojem 3 na brojevima 72582 i 87433.

2. »Broj je deljiv sa 9 samo onda kad je zbir njegovih cifara deljiv sa 9«.

Prikaz tava je u potpunosti isti, kao i za deljivost brojem 3, jer i ovde važi osobina, da delenje ma koje dekadne jedinice brojem 9 daje kao ostatak uvek 1.

Postupak na broju 5724 izgleda ovako. Kako je

$$5724=5000+700+20+4=5\cdot 10^3+$$
$$+7\cdot 10^2+2\cdot 10^1+4\cdot 10^0 \quad \text{t. j.}$$

$$5724=(999+1)\cdot 5+(99+1)\cdot 7+(9+1)\cdot 2+4$$

to imamo da je

$$5724=(999\cdot 5+99\cdot 7+9\cdot 2)+(5+7+2+4)$$

Kako je izraz u prvoj zagradi deljiv sa 9. to će broj 5724 biti deljiv brojem 9, ako je zbir cifara u drugoj zagradi deljiv sa 9, a odakle proizilazi opšte pravilo za deljivost brojem 9.

Pokaži postupak deljivosti brojem 9 na primerima 23895 i 56328.

D. Trifunović

[1] Premijer Nehru u knjizi »Otkriće Indije« (odeljak »Matematika Stare Indije«) spominje, da se pronalazak (A) čoveka primitivca od pre nekoliko hiljada i hiljada godina može uporediti sa najvećim, epohalnim pronalascima u svetu. Do pronalaska (A), tj. da se sistem brojanja i pisanja brojeva zasniva na dekadnom sistemu, došlo se na sledeći način. Kada je stari Indijac brojao do deset (to je vreme kada čovek nije znao za pismo) upotrebio je sve prste na rukama. Dalje brojanje nije bilo moguće, dok se taj isti stari Indijac nije setio, da pored svojih deset prstiju doda prste drugog Indijca, koji su označavali koliko je puta prvi uzeo po deset itd. Prvi Indijac je bio mesto jedinica, drugi mesto desetica, treći bi bio mesto stotina, itd.

Svakako da je u ovakvom načinu brojanja sadržan pojam nule, kao tekovine starih Indijaca.

ISPRAVAK

Posljednja rečenica na str. 138. četvrtog broja prošlogodišnjeg Mat. fiz. lista (u članku: Milijun, bilijun, trilijun, ...) treba da glasi:

To je toliko velik broj, da taj elektron, usprkos svojoj sićušnoj udaljenosti od jezgre ($5{,}29\cdot 10^{-9}$ *cm* t. j. oko 5 stotnina milimikrona), u jednoj sekundi pređe preko 2000 kilometara.

Vidi također i 108. zadatak iz fizike u VI. godištu!

Milan Krajnović

Matematička ukrštenica

NADA ŠNAUC, svrš. uč. gimnazije Niš

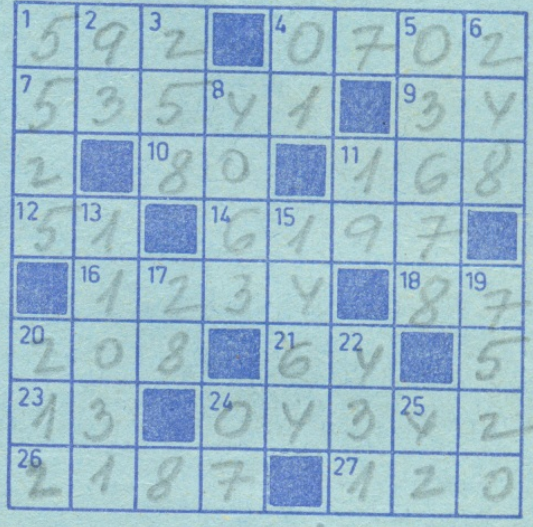
U svako kvadratno polje ne dolazi po jedno slovo, već po jedna arapska cifra! Decimalne zapete ne treba unositi.

Vodoravno:

1. $\sqrt[3]{207\,474\,688}$.
4. *log* 5,035.
7. Broj, kojem je logaritam jednak 4,72869.
9. Broj, (manji od 40) kod koga je kvadrat zbira cifara uvećan za kvadrat razlike cifara jednak 50.
10. Zbir rešenja sistema: $x+y+z=20$, $y+z+u=50$, $z+u+x=60$, $u+x+y=110$.
11. Proizvod korena jednačine $x^2-29x+168=0$.
12. Dvocifreni broj, koji ako se podeli polu-zbirom cifara, daje 17.
14. *tg* 80° 50′.
16. Četverocifreni broj, čije cifre čine rastuću aritmetičku progresiju zbira 10.
18. Hipotenuza pravouglog trougla, čije su katete 60 i 63.
20. Površina deltoida s dijagonalama 16 i 26.
21. Dužina tetive kruga $x^2+y^2+50x+60y-2571=0$, nad kojom periferiski ugao iznosi 30°.
23. $371293^{\frac{1}{5}}$.
24. Prvih 5 cifara broja *log e*.
26. Broj, kojim treba pomnožiti 34^7 da se dobije 102^7.
27. Broj stepeni ugla, kome je lučna mera $\frac{2}{3}\pi$.

Uspravno:

1. Zbir kvadrata celih brojeva od 1 do 25.
2. Dvocifreni broj, čiji se kvadrat cifara sadrži u njihovom zbiru 4 puta, a u razlici 2 puta.
3. $\sqrt{37^3+24^3+45^2+\sqrt[3]{238328}}$.
4. Poluparametar elipse $x^2+100y^2=100$.
5. Prvih 5 cifara broja $\frac{1}{e}$.
6. Trocifreni broj, kome cifre čine rastuću geometrisku progresiju zbira 14.
8. $2\cdot7-2\cdot7^2-2\cdot7^3+2\cdot7^4+2^4+7^2-2\cdot17$.



11. Poluprečnik kruga $x^2+y^2+24x+18y-136=0$.
13. $17^3+18^3+17^2-3$.
15. Prve 4 cifre broja $\sqrt[3]{\pi}$.
17. Poluprečnik kruga, upisanog u kvadrat strane 56.
19. Najmanji zajednički sadržalac brojeva 160 i 376.
20. Najveći zajednički činilac brojeva 2332 i 2756.
22. Broj minuta u 7° 11′.
24. $\sqrt[10]{0{,}0282475249}$.
25. 2^5+2^3+2.

KUPON ZA MAT. UKRŠTENICU

Ime i prezime: .....

.....

Razred i škola: .....

Mesto: .....

Rešenje (uz prilog ispunjenog kupona) poslati do 20. X. 1957. Na kuverti naznačiti: »Matematička ukrštenica«. Između učenika, koji ispravno reše ukrštenicu, ždrebom će se izvući njih 10 i nagraditi matematičkim knjigama. Rešenje ukrštenice i imena nagrađenih objavit će se u narednom broju.

Rješenja, dopise i članke slati na Uredništvo **»Matem.-fiz. lista«, Zagreb, Ilica 16/III., pošt. pretinac 165.**

Svim suradnicima!

Svi rukopisi (osim učeničkih rješenja) treba da budu napisani pisaćim strojem, a crteži izrađeni tušem na posebnom čvrstom papiru.

Rješavateljima zadataka

U rješenjima treba uvijek napisati i sam zadatak s rednim brojem, ne pozivajući se na broj i datum »Mat.-fiz. lista«, u kome je bio postavljen. Svako rješenje zadataka pisati na posebnom papiru (četvrtini ili pola arka) i to samo na jednoj strani papira. — Svako rješenje treba čitljivo potpisati (ime i prezime), naznačujući razred, školu i mjesto. Nečitljiva i neuredna rješenja ne će se uopće uzeti u obzir.

Umoljavaju se rješavatelji, da samostalno rješavaju zadatke ne tražeći nikako pomoći od nastavnika, a niti od koga drugoga. Umoljavaju se također rješavatelji, da propisno frankiraju listove, koje šalju našoj redakciji.

Savez Društava matematičara i fizičara FNRJ izdaje časopis

NASTAVA MATEMATIKE I FIZIKE

Pretplata iznosi za članove društava matematičara i fizičara 300 Din, a za škole i biblioteke 400 Din. Pretplatu i narudžbe slati (sa naznakom za časopis »Nastava mat. i fiz.«) na žiro račun »Nastave matematike i fizike« 10-KB-2-Ž-1262, Beograd.

Za Narodnu Republiku Hrvatsku pretplata se šalje na ček. upl. 40-KB-6-Ž-1133 ili uputnicom Hrv. prirodosl. društvo, Zagreb, Ilica 16/III. kat uz naznaku da je za »Nastavu«

DRUŠTVO MATEMATIČARA I FIZIČARA NR HRVATSKE IZDAJE ČASOPIS

GLASNIK
MATEMATIČKO-FIZIČKI I ASTRONOMSKI

Pretplata za 1957. godinu iznosi Din 480 i šalje se na administraciju GLASNIKA: Hrvatsko prirodoslovno društvo — Zagreb, Ilica 16/III.

Čekovni račun 40-KB-6-Ž-1077 za Društvo matematičara i fizičara NRH

Godišnja članarina za Društvo je Din 240. — Članovi primaju Glasnik uz nadoplatu Din 240

ВЕСНИК ДРУШТВА МАТЕМАТИЧАРА И ФИЗИЧАРА НР СРБИЈЕ

Годишња претплата (за 4 броја) износи 400 дин. Претплату слати Друштву математичару и физичара НР Србије на чек. рачун. број 102-Т-119, са назнаком за »Весник«. Сва преписку слати Друштву математичара и физичара НР Србије, Београд, пошт. фах 791.